**ДАРКЕНБАЕВА ГУЛЬСИМ СПАНДИЯРОВНА**

# АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РЕГРЕССИИ С АСИМПТОТИЧЕСКИ КОЛЛИНЕАРНЫМИ РЕГРЕССОРАМИ

## АННОТАЦИЯ

диссертационной работы на соискание степени
доктора философии (PhD) по специальности
6D060100 – Математика

**Актуальность темы исследования.** Рассмотрим модель

$$y_t = \alpha + \beta L(t) + u_t,\ t = 1,...,n,$$

где $L$ положительная, измеримая на $[A,\infty)$, $A>0$, и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(rx)}{L(x)} = 1 \text{ для любого } r>0$$

функция или, более короче, $L$ является медленно меняющейся функцией (ММ). Для случая, когда ошибки $\{u_t\}$ стационарные Филлипс (Phillips P.C.B. Regression with slowly varying regressors and nonlinear trends // Econometric Theory. – 2007. – Vol. 23 (4). – P. 557–614) получил асимптотическое распределение МНК оценок $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$.

Мы рассматриваем интегрированные ошибки

$$u_t = \rho u_{t-1} + v_t,\ t = 2,...,n,$$

где $\rho = 1$ под нулевой гипотезой и $\{v_t\}$ непричинный линейный процесс, т.е.

$$v_t = \sum_{i\in Z} c_i e_{t-i}\ .$$

Интегрированные ошибки и непричинные линейные процессы имеют широкое применение в статистике и эконометрике. Результаты, представленные в этой работе, могут быть использованы при выводе предельного распределения статистики теста на единичный корень для нашей основной регрессионной модели. Постановку этой задачи вы можете прочитать в работе Уематсу (Uematsu Y. Regression with a Slowly Varying Regressor in the Presence of a Unit Root // Global

COE Hi-Stat Discussion Paper Series gd11-209, Institute of Economic Research, Hitotsubashi University. – 2011. – 29 p.). Эта задача является открытой в настоящее время.

Также, как мы видим, мы ограничиваем наше внимание на модели с детерминированными регрессорами. Модели с такими регрессорами имеют множество применений, см. (Robinson P.M. Log-periodogram regression of time series with long range dependence // Annals of Statistics. – 1995. – Vol. 23 – P. 1048-1072; Hurvich C.M., Deo R., Brodsky J. The mean squared error of Geweke and Porter-Hudakís estimator of the memory parameter of a long-memory time series // Journal of Time Series Analysis. – 1998. – Vol.19 – P.19-46; Phillips P.C.B. Discrete Fourier Transforms of Fractional Processes. – Yale University, mimeographed. – 1999. – 59 p.; Wu C.F. Asymptotic theory of nonlinear least squares estimation // Annals of Statistics. – 1981. – Vol. 9 – P. 501-513; Barro R., Sala-i-Martin X. Economic Growth. – Cambridge, Massachusetts: The MIT Press. – 2004. – 160 p.; Phillips P.C.B., Sul D. Transition modeling and econometric convergence tests // Econometrica. – 2007. -Vol. 75(6) – P. 1771-1855; Phillips P.C.B., Sul D. Economic transition and growth // Journal of Applied Econometrics – 2009. – Vol. 27 – P. 1153-1185).

Еще одним применением этого исследования является решение проблемы раннего обнаружения пузырьков. Это макроэкономическая проблема, которая имеет прямые последствия для денежно-кредитной и налогово-бюджетной политики. Школа, возглавляемая П. Филлипсом, обеспечила решающим компонентом статистической процедуры, см. (Phillips P.C.B., Shi Shu-Ping, Yu J. Testing for Multiple Bubbles: Limit Theory of Real Time Detectors // International Economic Review. – 2015. – Vol. 56 – P. 1079-1134; Phillips Testing for Multiple Bubbles: Historical Episodes of Exuberance and Collapse in the S&P 500 // International Economic Review. – 2015. – Vol. 56 – P. 1043-1078; Phillips P.C.B. Exploring the Mysteries of Trends and Bubbles. // Australia's Economy and its International Context: The Joseph Fisher Lectures. - Adelaide: University of Adelaide Press, 2012. – Vol. II (1956–2012), Ch. 54. – P. 599–616; Phillips P.C.B., Yu J. Dating the Timeline of Financial Bubbles during the Subprime Crisis // Quantitative Economics. – 2010. – Vol. 1 – P. 455-491).

**Цели и задачи исследования.** Работа посвящена:

1) изучению центральных предельных теорем для квадратичных форм линейных процессов $\{v_t\}$;

2) нескольким новым последовательностям, добавленных в список $L_p$-приближаемых последовательностей, содержащихся в Мынбаеве (Mynbaev K. $L_p$-approximable sequences of vectors and limit distribution of quadratic forms of random variables // Advances in Applied Mathematics – 2001. – Vol. 26 (4). – P. 302–329);

3) доказательству результата Уематцу (Uematsu Y. Regression with a Slowly Varying Regressor in the Presence of a Unit Root // Global COE Hi-Stat Discussion Paper

Series gd11-209, Institute of Economic Research, Hitotsubashi University. – 2011. – 29 p.) об асимптотическом распределении в менее ограничительных условиях.

**Положения, выносимые на защиту:**

1) Получены сходимости некоторых квадратичных форм, используемых в регрессионном анализе.

2) Получены центральные предельные теоремы для линейных и квадратичных форм.

3) Добавлены несколько последовательностей в список $L_p$-приближаемых последовательностей, содержащихся в Мынбаеве (Mynbaev K. $L_p$-approximable sequences of vectors and limit distribution of quadratic forms of random variables // Advances in Applied Mathematics – 2001. – Vol. 26 (4). – P. 302–329).

4) Доказан результат Уематсу об асимптотическом распределении МНК оценок $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ в менее ограничительных условиях.

5) Выполнены Монте-Карло симуляций для асимптотического распределения МНК оценок $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$.

**Объекты исследования:** регрессия с медленно меняющимися регрессорами, регрессия с асимптотически коллинеарными регрессорами, непричинные линейные процессы, квадратичные формы, центральные предельные теоремы.

**Предмет исследования** $L_p$-аппроксимируемые последовательности, квадратичные формы линейных процессов, центральные предельные теоремы.

**Методы исследования** метод $L_p$-аппроксимации Мынбаева (Mynbaev K. $L_p$-approximable sequences of vectors and limit distribution of quadratic forms of random variables // Advances in Applied Mathematics – 2001. – Vol. 26 (4). – P. 302–329), центральные предельные теоремы.

**Новизна диссертационного исследования** заключается в том, что основная модель имеет медленно меняющийся (ММ) регрессор в присутствии единичного корня, а также регрессионная модель имеет интегрированные ошибки $u_t = \rho u_{t-1} + v_t,\ t = 2,...,n$, и $\{v_t\}$ является непричинным линейным процессом.

Результаты Раздела 3 выполняются для непричинных линейных процессов и обобщают некоторые утверждения Филлипса и Соло (Phillips P.C.B., Solo V. Asymptotics for linear processes // The Annals of Statistics. – 1992. – Vol. 20(2) – P. 971-1001) и Танаки (Tanaka K. Time Series Analysis: Nonstationary and Noninvertible Distribution Theory. 1st ed. – Wiley and Sons, 1996. -623 p.).

Результаты Раздела 4 обобщают теоремы Мынбаева (Mynbaev K. $L_p$-approximable sequences of vectors and limit distribution of quadratic forms of random variables // Advances in Applied Mathematics – 2001. – Vol. 26 (4). – P. 302–329) о сходимости квадратичных форм для случая асимметричных ядер.

Раздел 5 содержит несколько новых $L_p$-аппроксимируемых последовательности.

Изучение основной модели с интегрированными ошибками дало нам асимптотическое распределение $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$. Уэматсу охарактеризовал сходимость по распределению $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$, и оказалось, что он сильно отличается от того, что имел Филлипс со стабильными ошибками. В Разделе 6 мы доказываем результат Уематсу об асимптотическом распределении в менее ограничительных условиях.

**Теоретическая и практическая значимость исследования**. Это исследование делает шаг вперед для решения проблемы о тесте на единичный корень. Также имеет множество приложений в эконометрике и статистике.

**Связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами.** Данная диссертационная работа выполнялась в рамках научных проектов программы грантового финансирования фундаментальных исследований в области естественных наук Министерства образования и науки Республики Казахстан "Предсказание редких явлений и пространственных эффектов на финансовых и сырьевых рынках." (2015-2017 гг., № 4084/GF4) и "Оценка разрывных плотностей и функций распределения в связи с приложениями в экономике, теории финансов и страховом деле" (2018-2020 гг., AP05130154).

**Апробация работы.** Результаты работы были представлены и обсуждены на следующих конференциях и семинарах:

- «Актуальные проблемы чистой и прикладной математики», Алматы, 2015.
- Вторая международная конференция по статистическим распределениям и приложениям ICOSDA. – Ниагарский водопад, Канада, 2016.
- XIII Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Ломоносов-2017», Астана, 2017.
- городской научный семинар «Дифференциальные операторы и их приложения», Алматы, 2017;
- научный семинар Института математики, физики и информатики, Алматы, 2017;
- городской научный семинар «Дифференциальные операторы и их приложения», Алматы, 2019.

Кроме того, результаты диссертации обсуждались со специалистом по вероятности, статистике и эконометрике Карлосом Мартинс-Филью в ходе научной стажировки в Колорадском Университете в Боулдере, США, в 2016 году.

**Публикаций**. На основе результатов диссертации было опубликовано 7 работ: 5 журнальных статей (из них 1 – в индексируемых журналах, 4 – в журналах, рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки Министерства образования и науки Республики Казахстан):

1. Mynbaev K., Darkenbayeva G. Weak convergence of linear and quadratic forms and related statements on Lp-approximability // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2019. – Vol. 473 – P.1305-1319.

2. Mynbaev K., Darkenbayeva G. The asymptotic distribution of the OLS estimator of the regression with slowly varying regressor // Математический журнал. – 2015. - Т. 15, №2. – С. 80-98.

3. Mynbaev K.,Darkenbayeva G. Convergence of some quadratic forms used in regression analysis // Математический журнал. – 2016. - Т. 16, №3. – С. 156-165.

4. Mynbaev K., Darkenbayeva G. Monte-Carlo study for OLS estimators for regression with slowly varying regressor // Математический журнал. – 2017. - Т. 17, №3. – С. 84-90.

5. Mynbaev K., Darkenbayeva G. Analyzing variance in central limit theorems // Kazakh Mathematical Journal. – 2019. - V. 19, №3. – P. 30-40.

и 2 работы в сборниках международных научных конференций:

1. Darkenbayeva G. Регрессий с медленно меняющимися регрессорами // Тезисы докладов международной конференции «Актуальные проблемы математики и математического моделирования», посвященный 50-летию создания Института математики и механики. – Алматы, 2015. – С.24.

2. Darkenbayeva G. Сходимость некоторых видов квадратичных форм, возникающих в регрессионном анализе // Тезисы докладов XIII Международной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых «Ломоносов - 2017». – Астана, 2017. – С. 9.

**Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов диссертации** подтверждается публикацией полученных результатов в журнале, имеющим ненулевой импакт-фактор.

**Оценка полноты выполнения целей исследования.** Все полученные результаты являются новыми и базируются на собственных методах решения. В этой работе мы:

1) получили сходимость некоторых квадратичных форм, используемых в регрессионном анализе.

2) получили центральные предельные теоремы для линейных и квадратичных форм.

3) добавили несколько новых последовательностей в список $L_p$-приближаемых последовательностей, содержащихся в Мынбаеве.

4) доказали результат Уематсу об асимптотическом распределении МНК оценок $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ в менее ограничительных условиях.

5) сделаны симуляций Монте-Карло для МНК оценок $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$.

Таким образом, поставленные цели были достигнуты.

**Структура и объем диссертации**. Работа включает титульный лист, содержание, нормативные ссылки, определения, обозначения и сокращения, 7 разделов, выводы и ссылки. Общий объём диссертации 72 страницы, работа содержит 5 иллюстраций, 1 таблицу и 42 литературных источников.

**Основное содержание диссертации**. Введение включает в себя обоснование актуальности темы исследования, цели работы, основные положения выносимые

на защиту диссертации, объект и субъект исследования, методы исследования, новизну и практическую значимость диссертационной работы, связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами, апробацию работы, публикации автора и объём, структуру и содержание диссертации.

Первый раздел содержит более подробное введение в работу.

Во втором разделе приведены предварительные результаты, такие как полезные леммы, теоремы и предположения, которые будут использованы в диссертационной работе.

В Разделе 3 мы рассматриваем сходимости по распределению двух квадратичных форм, возникающих в тестировании на единичный корень для регрессии с медленно меняющимся регрессором.

В четвертом разделе приведены центральные предельные теоремы для линейных и квадратичных форм с доказательствами.

Пятый раздел посвящен медленной вариации и $L_p$-приближаемости. Здесь мы добавляем несколько новых последовательностей к списку $L_p$-приближаемых последовательностей, содержащихся у Мынбаева с доказательствами.

Шестой раздел содержит доказательство асимптотического распределения МНК оценок $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$.

Седьмой раздел содержит симуляции Монте-Карло для МНК оценок $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$.

В заключении перечисляются и обобщаются основные результаты, полученные в ходе реализации диссертации.