ЗАМБАРНАЯ ТАТЬЯНА СЕРГЕЕВНА

СЧЁТНЫЕ МОДЕЛИ МАЛЫХ ЗАВИСИМЫХ ТЕОРИЙ

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени
доктора философии (PhD) по специальности
6D060100 – «Математика»

Актуальность темы исследования. В настоящее время к основным задачам теории моделей можно отнести решение проблемы спектра, то есть, описание для различных классов теорий функции $I(T,\lambda)$ описывающей число неизоморфных моделей теории T мощности λ. Одной из недостаточно исследованных задач является описание числа $I(T,\omega)$ счётных неизоморфных моделей для счётной теории T.

С данным вопросом связана гипотеза Воота, согласно которой не существует теории, для которой число счётных моделей превышает мощность натуральных чисел и является меньше мощности вещественных чисел, то есть, теории T, для которой $\omega < I(T,\omega) < 2^{\omega}$.

М. Морли доказал что если число счётных моделей бесконечно, тогда оно должно быть либо равно ω, 2^{ω}, или мощности между ω и континуумом (2^{ω}). То есть, $I(T,\omega) \in \omega \cup \{\omega, \omega_1, 2^{\omega}\}$. Р. Воот доказал, что число счётных моделей счётной теории не может быть равно двум.

Теория называется малой, если число счётных всех её n-типов над пустым множеством не более чем счётно для любого конечного n. В случае когда теория не является малой число её счётных моделей максимально, то есть, равно 2^{ω}.

Дж. Балдвин и А. Лахлан подтвердили гипотезу Воота для класса несчётно категоричных теорий. Для класса омега-стабильных теорий эта гипотеза была подтверждена МакКаем, Харрингтоным и Шелахом. Л. Майер, используя теорию ортогональности 1-типов упорядоченно минимальных теорий Д. Маркера, доказала гипотезу Воота для класса упорядоченно минимальных теорий. Гипотеза Воота для класса вполне о-минимальных теорий была подтверждена С.В. Судоплатовым и Б.Ш. Кулпешовым.

Несмотря на то, что гипотеза Воота была подтверждена для индивидуальных классов полных теорий, в общем случае задача подсчёта числа счётных неизоморфных моделей всё ещё не решена. Одним из классов для которых эта гипотеза до сих пор не имеет доказательства является класс зависимых теорий. Именно этот класс находится под рассмотрением в данной диссертации.

Описание свойств, при которых полная счётная теория имеет максимальное, то есть 2^{ω}, число счётных моделей является важным вопросом в

изучении счётного спектра данных теорий. К примеру, в начале Л. Майер нашла достаточные условия для максимальности числа счётных моделей о-минимальных теорий и только после этого перешла к доказательству гипотезы Воота для о-минимальных теорий.

Другим примером является работа “Vaught’s conjecture for quite o-minimal theories” С. Судоплатова и Б. Кулпешова, в которой авторы установили условия максимальность счётного спектра, а затем доказали гипотезу Воота для почти о-минимальных теорий.

В связи с этим, большая часть работы будет посвящена поиску условий, при которых теория имеет максимальное число счётных неизоморфных моделей.

Вопрос о числе счётных моделей рассматривался в работах многих учётных. Множество авторов ссылаются на работы, написанные С. Шелахом, А. Пиллаем и М. Бендой. Ещё одна работа по этому направлению — это статья С.В. Судоплатова и Р.А. Попкова “Distributions of countable models of theories with continuum many types” которая классифицирует теории, имеющие континуум типов (и, следовательно, максимальное число счётных моделей) по различным критериям. В своей работе “The number of countable models” Е. Казанова рассматривает число счётных моделей с различных точек зрения, таких как полу-изолированность, порядок Рудин-Кейслера, гладкие классы и замыкания, предразмерности, размерности и стабильность. Б.С. Байжанов с Б. Омаров рассматривали число счётных неизоморфных моделей с точки зрения понятия конечной диаграммы модели. В настоящее время нет ответа на гипотезу Воота, но специалисты по теории моделей продолжают над ней работать, среди них, С.В. Судоплатов совместно с Б.С. Байжановым и В.В. Вербовским.

Число счётных моделей с $\emptyset$-определимым отношение линейного порядка рассматривалось в работах Л. Майер, М. Рубина, С. Шелаха, Б.С. Байжанова, С.В. Судоплатова, Б.Ш. Кулпешова и других специалистов. Вопрос о числе счётных моделей теорий с линейным и частичным порядком занимает большое место в данной работе, так как он важен в изучении класса зависимых не стабильных теорий.

Цели работы.

Работа посвящена изучению счётного спектра теорий, имеющих счётное число типов. Целями работы заключаются в следующем:

1. Найти условия максимальности числа счётных моделей.
2. Найти класс зависимых теорий для которого решается гипотеза Воота.

Положения, выносимые на защиту:

1. Если в теории (обогащения) линейного порядка существует конечное подмножество некоторой модели этой теории и существует крайне тривиальный 1-тип над этим подмножеством, тогда теория имеет 2^{ω} счётных неизоморфных моделей.

2. Если существует формула, определяющая частичный порядок на кортежах таким образом, что для любого натурального числа существует

дискретная цепь с длиной равной этому натуральному числу, тогда данная счётная полная теория имеет максимальное число счётных неизоморфных моделей.

3. Если в счётной полной теории (обогащения) линейного порядка на некотором неглавном 1-типе существует формула квази-следователь, тогда данная теория имеет 2^{ω} счётных неизоморфных моделей.

4. Класс слабо o-минимальных теорий ранга выпуклости 1 удовлетворяет гипотезе Воота.

Объектом исследования являются малые зависимые теории.

Субъектом исследования являются счётные модели малых зависимых теорий и их число с точностью до изоморфизма.

Методы исследования включают в себя анализ теорий через изучение свойств типов. Рассматриваются окрестности в реализации типа, то есть то, каким образом работают формулы внутри реализации данного типа, а также рассматриваются отношения ортогональности между несколькими типами: слабая и почти ортогональность между типами позволяют понять, каким образом связана реализация этих типов в моделях. К примеру, реализация одного типа в модели может влечь реализацию одного или нескольких других типов в этой же модели, либо реализации нескольких типов могут не зависеть друг от друга, позволяя все возможные комбинации реализации-опускания этих типов в моделях теории. Также при построении моделей используется метод, основанный на критерии Тарского-Воота. Критерий Тарского-Воота гарантирует что выбранное подмножество модели будет являться моделью рассматриваемой теории (и более того, элементарной подмоделью этой модели).

Научная новизна исследования. Проблема описания счётного спектра малых зависимых теорий в настоящее время открыта. Классы теорий, находящиеся под рассмотрением диссертационной работы, не были исследованы на число счётных моделей.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Исследования в направлении исследования диссертации представляют собой шаги в сторону решения гипотезы Воота. Полученные результаты о природе счётных моделей малых теорий могут быть применены к теории групп, колец и полей.

Связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами. Данная диссертационная работа выполнялась в рамках научных проектов программы грантового финансирования фундаментальных исследований в области естественных наук Министерства образования и науки Республики Казахстан “Свойства типов в зависимых теориях” (2015-2017 гг., 5125/GF4) и “Консервативные расширения, счетные упорядоченные модели и операторы замыкания” (2018-2020 гг., AP05134992).

Апробация работы. Результаты работы были представлены и обсуждены на следующих конференциях и семинарах:

Logic Colloquium 2015, Университет Хельсинки, Финляндия, 2015;

“Теория функций, информатика, дифференциальные уравнения и их приложения”, Алматы, 2015;

“Алгебра, анализ, дифференциальные уравнения и их приложения”, Алматы, 2016;

Logic Colloquium 2016, Лидс, Великобритания, 2016;

Ежегодная научная апрельская конференции института математики и математического моделирования, посвящённая дню науки, Алматы, 2017;

Международная летняя школа-конференция "Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры", Эрлагол-2017, Новосибирск, Россия, 2017;

“Актуальные проблемы чистой и прикладной математики”, Алматы, 2017;

Научные семинары отдела алгебры и математической логики института математики и математического моделирования;

Кроме того, результаты диссертации обсуждались со специалистами по теории моделей в ходе научной стажировки в Иллинойсском Университете в Чикаго и были представлены на семинаре Louise Hay Logic Seminar в ноябре 2017 года.

Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов диссертации подтверждается публикациями полученных результатов в журналах, имеющих ненулевой импакт-фактор.

Оценка полноты выполнения целей исследования. Все полученные результаты являются новыми и базируются на собственных методах решения. Были получены условия максимальности числа счётных моделей, а также выделен подкласс зависимых теорий, удовлетворяющий гипотезе Воота. Таким образом, поставленные цели были достигнуты.

Предложения по применению полученных результатов. Результаты диссертационной работы могут быть применены при изучении счётных моделей малых теорий и при поиске решения гипотезы Воота. К примеру, полученные условия максимальности числа счётных моделей влекут что теория, имеющая ω_1 счётных моделей не должна удовлетворять данным условиям. Результаты о счётных моделях могут быть применены к теориям алгебраических структур.

Оценка научного уровня работы в сравнении с достижениями в направлении исследования. Полученные результаты не проигрывают при сравнении с достижениями зарубежных коллег и вносят вклад в изучение счётного спектра малых теорий.

Публикации. На основе результатов диссертации было опубликовано 15 работ: 5 журнальных статей (из них 2 – в индексируемых журналах, 3 – в журналах, рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки Министерства образования и науки Республики Казахстан), и 10 работ в сборниках международных научных конференций.

Объём и структура диссертации. Работа включает титульный лист, содержание, нормативные ссылки, определения, обозначения и сокращения, 8

разделов, выводы и ссылки. Общий объём диссертации 79 страниц, работа содержит 1 иллюстрацию и 79 литературных источников.

Основное содержание диссертации. Введение включает в себя обоснование актуальности темы исследования, цели работы, основные положения выносимые на защиту диссертации, объект и субъект исследования, методы исследования, новизну и практическую значимость диссертационной работы, связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами, апробацию работы, публикации автора и объём, структуру и содержание диссертации.

Первый раздел объясняет текущее состояние исследуемой области теории моделей.

Второй раздел даёт предварительную информацию и объясняет базовые средства, которые будут использованы на протяжении диссертации, такие как критерий Тарского-Воота, опускание типов и компактность.

Третий раздел рассматривает наследия (другими словами, конечные диаграммы), то есть, множества всех типов реализующихся в данной модели, и, при условии данного предположения, рассматривает случай контр-примера гипотезы Воота, а именно показывается что при некотором условии если существует теория которая обладает ω_1 счётными неизоморфными моделями, тогда существует конечная диаграмма, которая имеет ω_1 счётных неизоморфных моделей.

В четвёртом разделе вводятся понятия слабой и почти ортогональности между типами, доказываются некоторые полезные свойства типов, а также, доказываются несколько теорем которые связывают ортогональность типов с числом счётных моделей.

Пятый раздел направлен на поиск условий, из которых следует, что малаая теория линейного порядка имеет максимальное число счётных неизоморфных моделей. Вводятся различные понятия тривиальности типов, а именно, понятия крайне тривиального типа, почти крайне тривиального типа, и понятие крайне тривиального в итоге типа. В разделе доказывается связь между тривиальностью типов и тип-сохраняющими формулами. Также доказывается что теория (обогащения) линейного порядка, которая обладает крайне тривиальным типом, имеет максимальное число счётных неизоморфных моделей.

В шестом разделе изучаются счётные теории с определимым частичным порядком на кортежах элементов. Также доказывается теорема о достаточном условии максимальности числа счётных неизоморфных моделей для таких теорий. Данное условие состоит в существовании для любого данного натурального числа φ-цепи длины большей, или равной этому числу.

В седьмом разделе рассматриваются теории с определимым линейным порядком и вводится понятие так называемой формулы квази-следователя. Данная формула позволяет строить определимые окрестности внутри типа. При помощи подхода, введённого в предыдущем разделе, доказывается, что теория (обогащения) линейного порядка, которая обладает формулой квази-

следователем на неглавном типе, имеет максимальное число счётных неизоморфных моделей.

В разделе 8 рассматривается подкласс зависимых теорий, а именно, класс слабо o-минимальных теорий ранга выпуклости 1. Доказывается бинарность таких теорий и, с помощью этого, показывается что такие теории удовлетворяют гипотезе Воота. А именно, доказывается что слабо o-минимальная теория ранга выпуклости 1 либо счётно категорична, либо является эренфойхтовой, то есть, имеет ровно k счётных неизоморфных моделей, где $3 \leq k < \omega$; имеет ω счётных моделей, либо имеет 2^{ω} , максимальное число счётных моделей.

Для пояснения основного результата также приводятся различные примеры слабо o-минимальных теорий ранга выпуклости 1 и производится подсчёт счётных неизоморфных моделей для данных теорий.

В заключительном разделе работы приводятся и обобщаются основные результаты, получение за период выполнения диссертации.