КОНЫРКУЛЖАЕВА МАРАЛ НУРЛАНОВНА

# ВЫЧЕТНЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ГРАФАХ

## АННОТАЦИЯ

диссертационной работы Коныркулжаевой М.Н., на соискание степени доктора философии (PhD) по специальности «6D060100-Математика»

**Актуальность темы исследования.** С математической точки зрения графы интересны тем, что они являются хорошей моделью для изучения свойств систем в зависимости от геометрии и топологии пространства. Графы составлены из нульмерных и одномерных многообразий и в этом смысле представляется интересным как смешанная размерность влияет на те или иные свойства математических объектов, определенных на графах.

С практической стороны, прежде всего при расчете упругих конструкций, необходимо исследование задач о сочленении сингулярно вырождающихся областей. При этом конструкция может состоять из областей разных размерностей. Требуется асимптотический анализ решений краевых задач в областях, зависящих от достаточно малых габаритов областей и стягивающихся к предельному «скелету», представимому в виде объединения множеств различных размерностей. Часто такие объекты называют стратифицированными множествами.

**Цель исследования.** В связи с тем, что дифференциальные операторы на графах не являются «чисто» дифференциальными, а представляют собой «гибридные» операторы, поэтому в диссертации ставится **цель:** математический аппарат, который создан для исследования спектральных свойств чисто дифференциальных операторов, перенести на «гибридные» операторы.

**Положения, выносимые на защиту.** Дано полное описание всевозможных самосопряженных сужений максимального оператора, выписаны корректные сужения максимального оператора и найдены формулы их резольвент, установлена зависимость резольвент от длин дуг графа и исследована равномерная резольвентная сходимость к предельному оператору, приведены спектральные эффекты предельного оператора.

**Задачи исследования.** Найти функцию Грина для дифференциального оператора на графе с граничными условиями, построить вычетное и спектральное разложение в ряд Фурье функции Грина дифференциального оператора второго порядка с граничными условиями. Следующая задача – исследовать поведение собственных значений и соответствующих собственных функций для двух простейших графом с малыми дугами на графах.

**Объект и предмет исследования.** Дифференциальные операторы на графах, как операторы составленные из скалярных матричных и

дифференциальных операторов. Для достижения поставленной цели в диссертации исследуются следующие задачи:

- корректно определить максимальный оператор,

- вывести формулу Лагранжа для максимального оператора,

- построить сопряженного оператора,

- описать всевозможные самосопряженные сужения максимального оператора,

- описать корректные сужения максимального оператора и вывод формулы их резольвент,

- найти зависимость резольвент от длин дуг графа и исследовать равномерную резольвентную сходимость к предельному оператору,

- указать спектральные эффекты предельного оператора.

**Методы исследования.** В диссертации используются хорошо апробированые методы классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, линейных дифференциальных операторов, методы функционального анализа, аппарат спектральной теории неограниченных операторов, методы теории функций комплексного переменного, а также методы теории ОДУ на графах.

**Научная новизна исследования.** Впервые установлена зависимость резольвент от длин дуг графа и показана равномерная резольвентная сходимость к предельному оператору. Указаны существенные спектральные эффекты предельного оператора, на которые до сих пор не обращали должного внимания.

**Обоснованность и достоверность.** Обоснованность и достоверность научных выводов, полученных в диссертации, подтверждаются их последовательным теоретическим и математическим обоснованием, а также экспериментальными данными, сопоставленными с имеющимися в открытых источниках технологическими и производственными данными.

**Теоретическая и практическая значимость исследования.** Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут найти применение в дальнейшем в развитии спектральной теории краевых задач на графах и в исследовании задач, возникающих в теории упругости, теории устойчивости и др.

**Апробация результатов исследования.** Полученные результаты по теме работы были представлены в восьми международных конференциях: международная научно-практическая конференция «Современная математика и ее приложения», 1 статья; международная конференция по теории функций, посвященный 100-летию А.Ф.Леонтьева, 1 тезис; the

international scientific conference «Weighted estimates of differential and integral operators and their applications», 1 тезис; тезисы докладов в VII международной молодежной научно-практической конференции «Математическое моделирование процессов и систем», 1 статья; конференция «Современные проблемы математики, механики и информатики», посвященной 25-летию Независимости Республики Казахстан, 1 тезис; конференция «XIV Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ–2018», 1 тезис; сборник тезисов международной научной конференций «Спектральная теория и смежные вопросы», 1 статья; international conference on mathematics «An Istanbul Meeting for World Mathematicians», 1 статья. По материалам диссертационной работы опубликованы 14 печатных работ, из них 3 в журналах, индексируемых в базе Scopus, 3 в журналах, рекомендуемых ККСОН МОН РК, 8 – труды в материалах международных научных конференции.

**Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов диссертации** подтверждается публикациями полученных результатов в журналах, имеющих ненулевой импакт-фактор.

**Оценка полноты выполнения целей исследования.** Все полученные результаты являются новыми и базируются на собственных методах решения. Были установлены существование вычетного разложения всякой функций из области определения рассматриваемого дифференциального оператора на графе в ряд Фурье по собственным функциям данной краевой задачи.

**Публикации.** На основе результатов диссертации было опубликовано 14 работ: 6 журнальных статей (из них 3 – в индексируемых журналах, 3 – в журналах, рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки Министерства образования и науки Республики Казахстан), и 8 работ в сборниках международных научных конференций.

Результаты по теме диссертации были опубликованы в следующих работах:

Публикации в рейтинговых научных журналах

1 Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Коныркулжаева М.Н. Самосопряженные сужения максимального оператора на графе // Уфимский математический журнал. Т.9. выпуск 4, С.36-44, 2017.

2 Borisov D.I., Konyrkulzhayeva M.N. Perturbation of threshold of the essential spectrum of the Schrodinger operator on the simplest graph with a small edge // Journal of Mathematical Science, V.239, No.3, P.248-267, 2019.

3 Борисов Д.И., Коныркулжаева М.Н. Простейшие графы с малыми ребрами: асимптотики резольвент и голоморфная зависимость спекта // Уфимский математический журнал. Т.11, №2, С.56-71, 2019.

ККСОН

1 Жанузакова Д.Т., Коныркулжаева М.Н., Таирова А.Б., Тулеухасым С.Т. Представление резольвенты дифференциального оператора на геометрическом графе // Вестник КазНПУ им.Абая. №1(61), С.61-67, 2018.

2 Жаруллаев Д.Б., Кангужин Б.Е., Коныркулжаева М.Н. Функция Грина дифференциального оператора на графе-звезде с общими граничными условиями // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. №1(101), С.48-58, 2019.

3 Аймал Раса Г.Х., Аузерхан Г.С., Коныркулжаева М.Н. Функция Грина задачи Дирихле дифференциального оператора на графе-звезде при $m$. // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. №1(101), С.14-28, 2019.

Публикации в материалах международных конференций

1 Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Коныркужаева М.Н. Сверточное представление резольвент дифференциального оператора на графе // Сборник докладов международной научно-практической конференции «Современная математика и ее приложения» Уфа, БашГУ. С.323-328, 2017.

2 Kanguzhin B.E., Zhapsarbayeva L.K., Konyrkulzhayeva M.N. Representation of the resolvent of second order differencial operator on a graph // The International Scientific Conference «Weighted estimates of differential and integral operators and their applications» P.193-194, Astana, 2017.

3 Жанай А.Ж., Кангужин Б.Е., Коныркулжаева М.Н. Об одной задаче на собственные значения дифференциального уравнения третьего порядка // Тезисы докладов VII международной молодежной научно-практической конференции «Математическое моделирование процессов и систем», Уфа, С. 14-19, 2017.

4 Жанузакова Д.Т., Коныркулжаева М.Н. Представление резольвенты дифференциального оператора на компактных графах // Конференция «Современные проблемы математики, механики и информатики», посвященной 25-летию Независимости Республики Казахстан", Казахстан, г. Караганда, С.28, 2016.

5 Коныркулжаева М.Н. Функция Грина задачи Дирихле для оператора Штурма-Лиувилля // XIV Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ–2018», Казахстан, С.24-26, 2018.

6 Коныркулжаева М.Н. Решение дифференциальных уравнений с первыми краевыми условиями на графе-звезде // Сборник тезисов

международной научной конференции «Спектральная теория и смежные вопросы» Уфа, С.97-98, 2018.

7 Kanguzhin B.E., Konyrkulzhayeva M.N. Green's function of the Dirichlet problem for the differential operator on a star-shaped graph // International conference on mathematics: «An Istanbul Meeting for World Mathematicians» Istanbul, Turkey, P.195-204, 2018.

8 Кангужин Б.Е., Коныркулжаева М.Н., Оператор, резольвенты которых имеют сверточное представление, и их спектральный анализ // Международную конференцию по теории функций, посвященный 100-летию А.Ф.Леонтьева. – Уфа, Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Башкирский государственный университет и Академия наук РБ. С.80, 2017.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из 144 страниц, которые включают в себя введение, три главы с разделами, заключение и список использованных источников.

Введение диссертации содержит краткое описание современного состояния исследуемой темы диссертации, актуальность и обоснования необходимости исследования. В первой главе вначале вводятся известные понятия и утверждения, касающиеся дифференциальных операторов на произвольных связных геометрических графах без петель. Максимальный оператор на графе определяется дифференциальными выражениями на дугах, условиями Кирхгофа во внутренних вершинах графа. Для введенного максимального оператора доказан аналог формулы Лагранжа. Для произвольного набора граничных условий указан алгоритм построения сопряженных граничных форм. Также дано полное описание всех самосопряженных сужений максимального оператора.

Во второй главе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией. Выведена функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на звездообразном графе. При этом использованы стандартные условия Кирхгофа во внутренней вершине и краевые условия Дирихле в граничных вершинах.

В третьей главе рассматривается граф, состоящий из двух бесконечных дуг и одной дуги малой длины. На таком графе рассматривается оператор Шредингера с кусочно – постоянными потенциалами на бесконечных дугах и сингулярным потенциалом на малой дуге. Определены предельные краевые условия, в операторной норме получены двучленные асимптотики для резольвент рассматриваемых операторов и даны оценки остатков. Также изучается эффект возникновение изолированных собственных значений из края существенного спектра. Установлены эффективные, легко проверяемые достаточные условия существования и отсутствия таких собственных значений и обнаружена голоморфная зависимость возникающих собственных

значений из края существенного спектра. Также рассматривается звездный граф, состоящий из двух бесконечных дуг и одной дуги малой длины. Длина последней дуги считается малым параметром в задаче. Во нутренней вершине данного графа задается $\delta'-$взаимодействие, в граничной вершине малой дуги – условие Дирихле или условие Неймана. Получены предельные краевые условия, в операторной норме получены двучленные асимтотики для резольвент, даны оценки остатков. Изучается эффект возникновение изолированных собственных значений из края существенного спектра. Обнаружена голоморфная зависимость возникающих собственных значений из края существенного спектра.