СӘБИТБЕК БОЛЫС МӘЖИТҰЛЫ

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ-СОБОЛЕВА НА ОДНОРОДНЫХ ГРУППАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЙ

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности «6D060100-Математика»

Актуальность темы исследования. Предмет неравенств Харди уже 100 лет, с 1918 по 2018, является предметом непрерывных исследований огромного числа математиков. Оригинальное неравенство было опубликовано Г.Н. Харди в “Notes on some points in the integral calculus (51)”, Messenger of Mathematics, 48 (1918), стр. 107-112.

За последние 100 лет неравенства Харди и связанный с ними анализ были предметом интенсивных исследований: на данный момент список в MathSciNet насчитывает более 800 статей, содержащих слова «Неравенство Харди» в названии и почти 3500 статей, содержащих данные слова в абстракте или обзоре. Неравенства Харди были описаны во многих монографиях и обзорах; здесь мы можем отметить отлично написанные монографий Опека и Кюфнера в 1990, Дэвиса в 1999, Эдмундса и Эванса в 2004, часть книги Мазии, Гоусуба и Морадифама в 2013, и Балинского, Эванса и Льюиса в 2015, также как и книги из различных областей, связанные с неравенствами Харди: устойчивые по времени неравенства Харди, неравенства Харди с общими ядрами, неравенства Харди с весами, неравенства Харди и пространства последовательностей.

Однако, все эти презентации в значительной степени ограничиваются Евклидовым частью по всему имеющемуся богатству информации.

В то же время, есть другой уровень интенсивных исследований связанных с функциональными неравенствами типа Харди в субэллиптических случаях, мотивированными их приложениями к задачам с субэллиптическими дифференциальными уравнениями. Это дополняется более общими анизотропными версиями теории. В этом направлении, субэллиптические идеи анализа на группе Гейзенберга, значительно усовершенствованы Фолландом и Штейном в 1974, последовательные разработки Фолланда в 1975 заложили основы для анализа на стратифицированных группах (или однородных группах Карно). Более того, в их фундаментальной книге называемой “Hardy spaces on homogeneous groups”, Фолланд и Штейн заложили основы для «анизотропного» анализа на

общих однородных группах, т.е. группах Ли, снабженных совместимым семейством расширений. Такие группы обязательно нильпотентны, а область однородных групп почти исчерпывает весь класс нильпотентных групп Ли, включая классы стратифицированных групп и, более общее, градуированных групп. Среди многих одним из мотивов проведения анализа однородных групп является «перенос идей и результатов гармонического анализа, зависящих только от групповых и расширительных структур». Место, где встречаются неравенства типа Харди и однородные группы является прекрасной областью математики, которая не была последовательно рассмотрена в форме PhD диссертации. Основная цель докторской диссертации углубленно понимание неравенств типа Харди и тесно связанных тем с точки зрения однородных групп Фолланда и Штейна. Хотя мы будем строить общую теорию неравенств Харди, Рейлиха, Каффарелли-Кона-Ниренберга, Соболева и т.д. в условиях стратифицированных групп.

Эти темы составляют ядро этого PhD диссертации с материалами, дополненными тесно связанными с данной темами, такими как принципы неопределенности, теория линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с субэллиптической структурой, а также теория (анизотропных) функциональных пространств.

Целью диссертационной работы заключается в изучении субэллиптических функциональных неравенств на однородных группах, таких как неравенства Харди, Харди-Соболева, Каффарелли-Кон-Ниренберга, Релиха.

Задачи исследования:

- установить геометрические неравенства Харди и Харди-Соболева на полупространствах стратифицированных групп;
- получить горизонтальные функциональные неравенства, такие как неравенства Харди, Реллиха, Каффарелли-Кона-Ниренберга, Харди-Релиха;
- получить весовые неравенства Харди и Релиха с граничными членами для сублапласового фундаментального решения;
- получить весовые неравенства Харди и Релиха для общих векторных полей.

Объектом исследования является доказательство основных функциональных неравенств для субэллиптических дифференциальных уравнений, а именно, субэллиптическое расширение неравенств Харди, Соболева, Каффарелли-Кон-Ниренберга, Релиха, Харди-Соболева, а также исследование «субэллиптических» функциональных пространств и теорем вложения.

Методы научного исследования. Для исследования этой PhD диссертации используются классические методы исчисления, теория групп Ли, теория ДУЧ, а также новые идеи математических наук.

Научная новизна работы. В диссертационной работе были получены следующие новые результаты:

- *Геометрические неравенства Харди и Харди-Соболева на стратифицированных группах.* В этом направлении мы получили геометрические неравенства Харди и Харди-Соболева на полупространствах. Мы представили L^2 и L^p версии (субэллиптических) геометрических неравенств Харди в полупространствах и выпуклых областях на общих стратифицированных группах. Как следствие, мы вывели неравенство Харди-Соболева в полупространстве на группе Гейзенберга. Кроме того, установлено геометрическое неравенство Харди на звездных множествах.

- *Горизонтальные неравенства на стратифицированных группах.* Во втором направлении мы изучаем горизонтальную версию неравенств типа Харди. Вследствие неравенства был получен вариант горизонтальных весовых неравенств типа Харди-Релиха на стратифицированных группах Ли, на которых определены пространства Соболевского типа на стратифицированных группах Ли и доказаны теоремы вложения для этих функциональных пространств. Кроме того, мы получили субэллиптические тождества типа Пиконе, в результате чего мы доказали неравенства типа Харди и Реллиха для анизотропных p-суб-Лапласианов. Кроме того, на стратифицированных группах получены аналоги неравенств типа Харди с кратными особенностями и многочастичных неравенств типа Харди.

- *Неравенства типа Харди и Реллиха и суб-Лапласиан фундаментальные решения*. Получены обобщенные весовые неравенства типа L^p-Харди, L^p-Реллих и L^p-Каффарелли-Кон-Ниренберга с граничными членами для стратифицированных групп. Как следствие, большинство неравенств типа Харди и принципов неопределенности типа Гейзенберга-Паули-Вейля для стратифицированных групп восстанавливаются. Кроме того, получено весовое неравенство типа с граничным членом. Мы также представляем неравенства Харди и Релиха для сублаплацианов в терминах их фундаментальных решений на кватернионной группе Гейзенберга.

- *Весовые неравенства типа Харди и Реллиха для общих векторных полей.* В этом направлении мы изучаем весовые неравенства Харди и Релиха для общих векторных полей без группы. Установлены весовые анизотропные неравенства типа Харди и Реллиха с граничными членами для общих (вещественных) векторных полей. Как следствие, мы получаем новые, а

также многие фундаментальные неравенства типа Харди и Реллиха, которые известны в разных условиях.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Данное исследование носит в основном фундаментальный характер, вносит ценный вклад в развитие теории функционального анализа нильпотентных групп Ли и теории дифференциальных уравнений, способствует повышению имиджа Республики Казахстан в научном мире. Полученные результаты будут применены для решения различных задач теоретической физики.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 15 работ, в том числе 3 публикации в научных изданиях, входящих в перечень рекомендованный Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК для публикации основных научных результатов научной деятельности, 4 публикация в рейтинговом научным журнале, индексируемый в базе данных Thomson Reuters, 8 публикации в материалах международных конференций, в том числе 1 публикация в материалах зарубежной международной конференции.

Результаты по теме диссертации были опубликованы в следующих работах:

Публикация в рейтинговом научным журнале

1 Sabitbek B., Suragan D. Horizontal Weighted Hardy–Rellich Type Inequalities on Stratified Lie Groups // Complex Analysis and Operator Theory. – 2018, - V. 12, - P. 1469-1480. (Scopus, Web of Science, Q2).

2 Sabitbek B., Suragan D. On green functions for Dirichelet sub-Laplacians on a Quaternion Heisenberg group // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. – 2018 –V. 13, - No. 4. (Scopus, Web of Science, Q3).

3 Ruzhansky M., Sabitbek B., Suragan D. Weighted Lp-Hardy and Lp-Rellich inequalities with boundary terms on stratified Lie groups // Revista Matematica Complutense. – 2019, – Vol. 32, - Issue 1, - P. 19–35. (Scopus, Web of Science, Q1).

4 Ruzhansky M., Sabitbek B., Suragan D. Weighted anisotropic Hardy and Rellich type inequalities for general vector fields // Nonlinear Differential Equations and Applications (NoDEA). – 2019, - V. 26, - No. 13. (Scopus, Web of Science, Q1).

ККСОН

1 Sabitbek B. Embedding theorem of Sobolev type spaces on stratified Lie groups // Mathematical Journal. – 2016, - V. 16, - No. 3(61), - P. 166-180.

2 Sabitbek B., Suragan D. Hardy and Rellich type inequalities on the complex affine group // Eurasian Mathematical Journal. – 2017. - V. 8, - No. 2. - P. 31-39.

3 Kalmenov T.Sh., Sabitbek B. On Hardy and Rellich type inequalities for the Grushin operator // Mathematical Journal. – 2018, - V. 18, - No. 2(68), - P. 133-142.

Публикации в материалах международных конференций

1 Sabitbek B. Hardy and Rellich type inequalities on Complex Affine group // Конференция "Весомая оценка дифференциальных и интегральных операторов и их приложение", Евразиский национальный университет им. Л.Н.Гумилев, – 2017, С. 50-51.

2 Sabitbek B. On Hardy and Rellich type inequalities for Grushin operator // Тезисы докладов: ежегодная научная апрельская конференции института математики и математического моделирования, посвящённая дню науки и научный семинар “Дифференциальные операторы и моделирование сложных систем” посвящённый 70-летнему юбилею профессора Мувашархана Танабаевича Дженалиева. – 2017,- С. 166-167.

3 Sabitbek B. An embedding theorem of Sobolev type spaces on stratified Lie groups // International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2016)", Almaty, 2016.

4 Sabitbek B. Horizontal weighted Hardy-Rellich type inequalities // Book of Abstracts, ISAAC Congress 2017, Векше, Швеция.

5 Sabitbek B. On Hardy and Rellich type inequalities for an Engel-type operator // AIP Conference Proceedings, - 2017.

6 Sabitbek B., Suragan D., Yesserkegenov N. Improved critical Hardy inequalities on 2-dimensional quasi-balls // AIP Conference Proceedings, - 2017.

7 Kalmenov T.Sh., Sabitbek B., Suragan D. An inequality for Schatten p-norms of compact operators // AIP Conference Proceedings, - 2016.

8 Kalmenov T.Sh., Sabitbek B. A Boundary Condition of the Volume Potential for Strongly Elliptic Differential Equations // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, - 2017.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа включает титульный лист, содержание, введение, четыре раздела, заключение и список использованных источников, состоящий из 83 наименования. Общий объем диссертации составляет 105 страниц.

Основное содержание диссертации. Во введении отражены обоснование актуальности темы диссертационной работы, цель, объект,

предмет, задачи исследования, обоснование научной новизны работы, ее теоретической и практической значимости, научные положения, выносимые на защиту, количество имеющихся публикаций.

В главе 1 мы изучаем геометрические неравенства Харди и Харди-Соболева на полупространствах по формуле

$$\int_{\mathbb{H}^+} |\nabla_H u|^2 d\xi \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{H}^+} \frac{\mathcal{W}(\xi)^2}{dist(\xi, \partial \mathbb{H}^+)^2} |u|^2 d\xi,$$

и

$$\left(\int_{\mathbb{H}^+} |\nabla_H u|^2 d\xi - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{H}^+} \frac{\mathcal{W}(\xi)^2}{dist(\xi, \partial \mathbb{H}^+)^2} |u|^2 d\xi \right)^{1/2} \geq C \left(\int_{\mathbb{H}^+} |u|^2 d\xi \right)^{\frac{Q-2}{2Q}},$$

где $dist(\xi, \partial \mathbb{H}^+)$ является евклидово расстояние до границы и функция угла

$$\mathcal{W}(\xi) := \left(\sum_{i=1}^{n} \langle X_i(\xi), \nu \rangle^2 + \langle Y_i(\xi), \nu \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В главе 2 мы изучаем следующую горизонтальную версию неравенств типа Харди

$$\int_{\mathbb{G}} |\nabla_H u(x)|^2 dx \geq \left(\frac{N-2}{2} \right)^2 \int_{\mathbb{G}} \frac{|u(x)|^2}{|x'|^2} dx,$$

где $|\cdot|$ это евклидова норма и ∇_H горизонтальный градиент.

В главе 3 мы исследуем следующий тип неравенств Харди

$$\int_{\mathbb{G}} |\nabla_H u(x)|^2 \geq \left(\frac{Q-2}{2} \right)^2 \int_{\mathbb{G}} \frac{|u(x)|^2}{(d(x))^2} dx,$$

где Q является однородным измерением стратифицированной группы $\mathbb{G}$ и $d(x)$ так называемый $\mathcal{L}$-gauge, которая является частной однородной квазинормой, полученной из фундаментального решения суб-Лапласиана.

В главе 4 мы изучаем весовые неравенства Харди и Релиха для общих векторных полей без групповой структуры как

$$\int_\Omega W(x) |\nabla_X u|^p dx \geq \int_\Omega H(x) |u|^p dx, \ \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

и

$$\int_\Omega W(x) |\mathcal{L}_X u|^p dx \geq \int_\Omega H(x) |u|^p dx, \ \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$