***3-дәріс*. Біртекті дифференциалдық теңдеулер.**

Дәрістің қысқаша мазмұны:

Анықтама 9. $\varphi(x;y)$ функциясы x пен y бойынша α -шы ретті біртекті функция деп аталады, егер кез келген t үшін: $\varphi(tx;ty)=t^{\alpha}\varphi(x;y)$ теңдігі орындалатын болса.

Анықтама 10. Егер $M(x;y)$ және $N(x;y)$ - бірдей ретті біртекті функциялар болса, онда (1) теңдеуі біртекті дифференциалдық теңдеу деп аталады.

$y' = f(x, y)$ теңдеуі біртекті болады, егер $f(tx;ty) = f(x;y)$, яғни, $\alpha = 0$.

Біртекті дифференциалдық теңдеу айнымалыларды ауыстыру көмегімен айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуге келтіріледі:

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux,\ y' = u + xu' \quad \text{немесе} \quad dy = udx + xdu. \qquad (12)$$

Мысал 7. Теңдеуді шеш: $y^2 + x^2 y' = xyy'$.

Шешуі. Барлығын теңдеудің бір жағына жинақтау арқылы, біртекті дифференциалдық теңдеуге келтіреміз:

$$y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx} \ \Rightarrow \ y^2 dx + (x^2 - xy)dy = 0$$

$M = y^2$ және $N = x^2 - xy$ - 2-ші ретті біртекті функциялар болғандықтан, теңдеу біртекті дифференциалдық теңдеу. $u = \frac{y}{x}$ белгілеуін енгіземіз.

$u^2 x^2 dx + (x^2 - x^2 u)(udx + xdu) = 0 \Rightarrow udx + x(1-u)du = 0$ - бұл айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу. Екі жағын да $u \cdot x$ көбейтіндісіне бөліп, интегралдасақ:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{1-u}{u} du = C_1 \Rightarrow \ln|x| + \ln|u| - u = C_1 \Rightarrow \ln|ux| - \ln e^4 = \ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{xu}{e^u} = C \Rightarrow \left| u = \frac{y}{x} \right| \Rightarrow y = Ce^{\frac{y}{x}} \text{ - жалпы шешім.}$$

$u = 0$ және $x = 0$ жағдайлары $y = ux = 0$ жағдайымен тепе-тең. Жалпы шешімнен C=0 болғанда шығады.

Ескерту 4 . $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right)$ түріндегі теңдеу біртекті дифференциалдық теңдеуге келтіріледі.

Мысал 8. $(x - y + 1)dx = (2x + y - 1)dy$ теңдеуін біртекті дифференциалдық теңдеу түріне келтір.

Шешуі. Айнымалыларды ауыстырамыз (h және t - тұрақтылар):

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + t \end{cases} \Rightarrow |dx = du,\ dy = dv| \Rightarrow (u - v + h - t + 1)du = (2u + v + 2h + t - 1)dv.$$

h және t -ны бос мүшелері нөлге тең болатындай етіп, таңдап аламыз:

$$\begin{cases} h - t + 1 = 0 \\ 2h + t - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow h = 0, t = 1.$$

Сонымен, $x = u, y = v + 1$ деп жаңа айнымалылар енгізсек,

$(u - v)du = (2u + v)dv$ түріндегі біртекті дифференциал теңдеуге келеміз.

Мысал 9. $2x^2 y' = x^2 + y^2$ дифференциал теңдеуін интегралда және оның *y(1)=0* бастапқы шартын қанағаттандыратын дербес шешімін тап.

$2x^2$ және x^2+y^2 функциялары екінші ретті біртекті функция болғандықтан, берілген теңдеу - біртекті. Айнымалыларды ауыстырамыз: $y = xu, y' = u + xu'$.

Онда

$$2x^2(u + xu') = x^2 + (xu)^2, 2x^2(u + xu') = x^2(1+u^2).$$

$x\neq 0$ деп, теңдеудің екі жағын да x^2-қа бөлеміз:

$$2u + 2x\frac{du}{dx} = 1+u^2, 2xdu = (1+u^2-2u)dx.$$

Айнымалыларды ажыратып, екі жағын да интегралдасақ:

$$\frac{du}{1+u^2-2u} = \frac{dx}{2x},$$

$$\int \frac{du}{1+u^2-2u} = \int \frac{dx}{2x}, \qquad \int \frac{d(u-1)}{(u-1)^2} = \frac{1}{2}\ln|x|,$$

$$-\frac{1}{u-1} = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln C, \qquad 1 = (1-u)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right).$$

Соңғы өрнектегі u-дың орнына y/x –ті қойып, жалпы интегралды аламыз: $1 = \left(1-\frac{y}{x}\right)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right), \qquad x = (x-y)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right).$

Оны y –ке қатысты шешсек, берілген дифференциал теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$y = x - \frac{x}{\ln\left(C\sqrt{|x|}\right)}.$$

$y(1)=0$ бастапқы шартын ескере, C тұрақтысын анықталық:

$$0 = 1 - \frac{1}{\ln C}, \qquad \ln C = 1, \qquad C = e.$$

Сонымен, берілген теңдеудің дербес шешімі: $y = x - \frac{x}{1+\ln\sqrt{|x|}}$. ◄