***8-дәріс*. Лагранж және Клеро теңдеулері**

Дәрістің қысқаша мазмұны:

Егер ізделінді функция бойынша шешілген (2) теңдеуінің түрі $y = \varphi(y')x + \psi(y')$ (5) түрінде болса, ондай теңдеулерді Лагранж теңдеулері деп атайды. Бұл теңдеулерді шешу үшін де параметр енгізу әдісін пайдаланамыз.

$y' = p$

$y = \varphi(p)x + \psi(p)$

$dy = d(\varphi(p)x + \psi(p))$

$dy = \varphi(p)xdx + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]dp$

$dy = pdx$

$pdx = \varphi(p)dx + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]dp$

$(\varphi(p) - p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp = 0 \quad / : dp$

$(\varphi(p) - p)\frac{dx}{dp} + x\varphi'(p) + \psi'(p) = 0 \quad / \quad \varphi(p) - p \neq 0$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \qquad (6)$$

Алынған (6) теңдеуі х-ке байланысты бірінші ретті сызықты біртексіз теңдеу. Бұл теңдеудің шешімін тұрақтыны вариациялау әдісімен шешеміз.

$$x = \left[C + \int \frac{\psi(p)}{p - \varphi(p)} e^{\int \frac{\psi(p)}{\varphi(p)-p} dp} dp \right] e^{\int \frac{\varphi(p)}{p-\varphi(p)} dp}$$

$$x = A(p)C + B(p)$$

$$y = E(p)C + D(p)$$

Ескерту: Лагранж теңдеуін параметр енгізу әдісімен шешу барысында $\varphi(p) - p \neq 0$ деп бөлгендіктен $\varphi(p) - p = 0$ теңдеуінің шешімдері жоғалған шешім бола ма деген сұраққа зерттеу жүргізуіміз керек. Айталық, бұл теңдеудің шешімдері $\varphi(p_i) = p_i$ болсын, i=1,2,…. Онда $\varphi(p)$–ның орнына p_i –ді қоямыз. $y = p_i x + \varphi(p_i)$ функциясы Лагранж теңдеуінің ерекше шешімі болуы мүмкін. Ал олардың графиктері ерекше қисықтар болады.

Анықтама: (3) түріндегі Лагранж теңдеуінің $\varphi(y') = y'$ болса, ондай теңдеулер Клеро теңдеулері деп аталады.

$$y = y'x + \varphi(y') \qquad (6)$$

$$y' = p$$

$$y = px\varphi(p)$$

$$dy = pdx + xdp + \psi'(p)dp$$

$$pdx = pdx + xdp + \psi'(p)dp$$

$$(x + \psi'(p))dp = 0$$

$$dp = 0 \Rightarrow p = c$$

$$x + \psi'(p) = 0$$

$$x = -\psi'(p)$$

$$y = cx + \psi(c)$$