***6-дәріс*. Толық дифференциалды теңдеулер.**

Дәрістің қысқаша мазмұны:

Анықтама.

$$M(x,y)dx + N(x,y) = 0 \qquad (1)$$

түріндегі дифференциалдық теңдеу толық дифференциалды теңдеу деп аталады, егер толық дифференциалы қандай да бір облыста теңдеудің сол жағындағы өрнекке тең болатын $u(x;y)$ функциясы табылса.

Сонымен,

$$Mdx + Ndy \equiv du(x) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \qquad (2)$$

Теорема 1. $M(x;y), N(x;y)$ үзіліссіз және дифференциалданатын функция және $\frac{\partial M}{\partial y}$ пен $\frac{\partial N}{\partial x}$ қандай да бір облыста үзіліссіз болсын. (1) теңдеуі толық дифференциалды теңдеу болуы үшін:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (3)$$

шарты орындалуы қажетті және жеткілікті. Және жалпы интеграл мына түрде жазылады:

$$\int_{x_0}^{x} M(x;y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0;y)dy = C, \qquad (4)$$

немесе:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C, \qquad (5)$$

мұндағы $M_0(x_{0,}y_0) \in D$.

Мысал 4. $(3x^3 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$ теңдеуін шеш.

Шешуі:

$M = 3x^3 + 6xy^2, N = 6x^2y + 4y^3$ және $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy$ болғандықтан, бұл толық дифференциалды теңдеу. $(x_0; y_0) = (0;0)$ болсын. Онда

$$\int_0^x (3x^2 + 6xy^2)dx + \int_0^y 4y^3 dy = \left[x^3 + 3x^2y^2\right]_0^x + y^4\Big|_0^y \Rightarrow x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$$ - жалпы интеграл.

Мысал 5. $\left(x^2 + y - 4\right)dx + \left(x + y + e^x\right)dy = 0$ теңдеудің жалпы интегралын тап.

$P = x^2 + y - 4, \quad Q = x + y + e^y$ белгілеуін енгіземіз. $\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, яғни, (3) шарты орындалады, берілген теңдеу толық дифференциалды теңдеу. Оның жалпы интегралын (4) немесе (5) түрінде іздейміз, қарапайымдылық үшін $x_0 = 0, \ y_0 = 0$ деп аламыз. x_0, y_0-дің бұл мәндерін таңдап алуымыз дұрыс, себебі $P(x, y), \ Q(x, y)$ функциялары мен оның дербес туындылары осы нүктеде анықталған, яғни, $M_0(0,0) \in D$. (4) формуласынан:

$$\int_0^x \left(x^2 + 0 - 4\right)dx + \int_0^y \left(x + y + e^y\right)dy = C,$$

$$\frac{x^3}{3} - 4x + xy + \frac{y^2}{2} + e^y - 1 = C,$$

ал (5) формуласынан:

$$\int_0^x \left(x^2 + y - 4\right)dx + \int_0^y \left(0 + y + e^y\right)dy = C,$$

$$\frac{x^3}{3} + xy - 4x + \frac{y^2}{2} + e^y - 1 = C$$

шығады, бұл (4) формуласынан табылған жалпы интегралмен беттеседі.