КУАНЫШ САУЛЕ КАЛДАРБЕККЫЗЫ

Численно-аналитические методы решения нелокальных задач для интегро-дифференциальных уравнений параболического типа

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по образовательной программе «8D05401 – Математика»

Параболические уравнения в частных производных занимают важное место в современной математике и находят широкое применение при моделировании разнообразных процессов, возникающих в науке и технике. Краевые задачи для параболических уравнений широко используются при решении прикладных задач, связанных с тепловыми процессами в инженерных системах, фильтрацией подземных вод, климатическим моделированием, исследованием биологических и химических процессов, экологическими приложениями, материаловедением, а также задачами финансовой инженерии.

Актуальность исследования. В настоящее время процессы с эффектом памяти широко исследуются в математической физике, теории теплопроводности, диффузии, гидродинамике, биологии и теории управления. Для их описания применяются интегро-дифференциальные уравнения параболического типа и нагруженные параболические уравнения. Отличительной особенностью этих уравнений является зависимость состояния системы от ее предшествующих, а в ряде случаев и последующих состояний. В связи с этим теория нагруженных и интегро-дифференциальных уравнений получила интенсивное развитие и остается одним из актуальных направлений современной теории дифференциальных уравнений.

Значительный вклад в развитие теории нагруженных параболических уравнений внесли А.Д. Искендеров, А.М. Нахушев, М.Т. Дженалиев, Х.Ж. Дикинов, А.А. Керефов, А.П. Белогуров, С.Х. Геккиева, М.А. Керефов, Р.И. Паровик, В.М. Борок, Я.И. Житомирский, Liu Junyi, Xu Mingyu, М.Х. Шхануков и другие исследователи. В работах А.М. Нахушева и В.И. Борисова исследованы нагруженные параболические уравнения, возникающие в результате линеаризации исходного уравнения Буссинеска. А.Д. Искендеров показал, что ряд обратных задач допускает сведение к нагруженным параболическим уравнениям. В свою очередь, Н.Н. Кочина доказала, что задачи регулирования уровня грунтовых вод при орошении также могут быть сведены к уравнениям данного класса.

Из курса математического анализа известно, что для приближенного вычисления определенного интеграла применяются квадратурные формулы: $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N} c_k f(x_k)$, где x_k - квадратурные узлы,а c_k - квадратурные коэффициенты. В теории приближенных вычислений данный подход широко используется для сведения интегро-дифференциальных уравнений к нагруженным уравнениям.В частности, в работах А.М. Нахушева рассматриваются интегро-дифференциальные уравнения параболического типа следующего вида:

$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Delta_x u(t,x) + \int_0^T k(t,s)u(s,x)ds$, где Δ_x- оператор Лапласа, $k(t,s)$- представляет собой ядро интегрального оператора, характеризующее пространственно-временную зависимость интегрального члена. Пусть на интервале $0 \le s \le T$ задано разбиение $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T$. Предположим, что ядро является кусочно-постоянной функцией, то есть $k(t,s) = a_i(t)$, $t_i \le s \le t_{i+1}$, $i = 0,1,\ldots,m$. Тогда интегральный член может быть представлен в виде $\int_0^T k(t,s)u(s,x)ds = \sum_{i=0}^{m} a_i(t) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(s,x)ds$. Используя квадратурную формулу, получаем приближение $\int_0^T k(t,s)u(s,x)ds \approx \sum_{j=0}^{m} b_j(t)u(t_j,x)$,где $b_j(t)$ - квадратурные коэффициенты. Таким образом, указанное преобразование позволяет обосновать сведение математических моделей, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями параболического типа, к нагруженным параболическим уравнениям. В этой связи нагруженные параболические уравнения можно рассматривать как частную либо приближенную модель интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма параболического типа.

Цель исследования. Цель диссертационной работы состоит в установлении условий однозначной разрешимости нелокальных задач для нагруженных параболических уравнений и интегро-дифференциальных уравнений параболического типа, а также в разработке аналитических и численно-аналитических методов их решения.

Объект исследования. Нелокальные задачи для нагруженных параболических уравнений и интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма параболического типа, а также численно-аналитические методы их решения.

Методы исследования. Теоретическую основу диссертационного исследования составляют методы теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, теория нелокальных задач для уравнений в частных производных, метод прямых, метод параметризации Джумабаева, а также методы численного анализа.

Теоретическая и практическая значимость исследования. В диссертационной работе исследована разрешимость нелокальных краевых задач для нагруженных параболических уравнений и интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма параболического типа. Полученные результаты вносят вклад в развитие теории нагруженных и интегро-дифференциальных уравнений. Разработанные методы могут быть использованы при исследовании нелокальных краевых задач, интегро-дифференциальных и нагруженных уравнений.Научная новизна исследования.

Основные результаты, выносимые на защиту. Научная новизна диссертационного исследования характеризуется следующими результатами:

- разработан и обоснован метод прямых для решения нелокальных задач для нагруженных параболических уравнений и интегро-дифференциальных

уравнений Фредгольма параболического типа, а также построены соответствующие дискретизированные задачи;
- при исследовании дискретизированных задач для систем нагруженных дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма применен метод параметризации Джумабаева, на основе которого разработаны алгоритмы решения соответствующих краевых задач;
- установлены условия однозначной разрешимости исследуемых задач и показана возможность построения их численно-аналитических решений;
- установлены условия сходимости, устойчивости и точности метода прямых, применяемого к решению нелокальных краевых задач для нагруженных параболических уравнений и интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма параболического типа;
- предложенные методы и полученные результаты вносят вклад в дальнейшее развитие теории нелокальных краевых задач и могут быть использованы при математическом моделировании сложных процессов в математической физике и прикладной математике.

Апробация. Основные результаты диссертационного исследования прошли апробацию на международных и республиканских научных конференциях, а также на научных семинарах. По теме диссертации опубликовано 16 научных работ.

Публикации в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus:

1. **Kuanysh S.K.,** Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. *Method of lines for a loaded parabolic equation*. Journal of Mathematics, Mechanics, Computer Science, 1(125), 2025, pp. 3-17. *Scopus* (CiteScore Percentile - 37%), *Web of Science* (Q3).
2. Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M., **Kuanysh S.K**. *Numerical-analytical method for solving initial-boundary value problem for loaded parabolic equation*. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 1(117), 2025, pp. 34-45. *Scopus* (CiteScore Percentile - 53%), *Web of Science* (Q2).
3. Assanova A.T., Liu Zh., **Kuanysh S.K.,** Kadirbayeva Zh.M. *Convergence, stability, and error analysis of the method of lines for solving loaded parabolic equation*. AIMS Mathematics, 10(12), 2025, pp. 29454-29469. *Scopus* (CiteScore Percentile - 86%), *Web of Science* (Q1).
4. **S.K. Kuanysh**, Zh.M. Kadirbayeva. *Analysis of Nonlocal Problem for Loaded Parabolic Equation via Numerical Method*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 46(10), 2025, pp. 5417-5427. *Scopus* (CiteScore Percentile - 56%), *Web of Science* (Q2).
5. S.M. Temesheva, Zh.M. Kadirbayeva, **S.K. Kuanysh.** *Analysis of Semi-periodic Problem for Integro-differential Equations of Parabolic Type*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 46(12), 2025, pp. 6441-6454. *Scopus* (CiteScore Percentile - 56%), *Web of Science* (Q2).
6. Искакова Н.Б., Кадирбаева Ж.М., Бакирова Э.А., **Куаныш С.К.** *Численный метод решения краевой задачи для параболического уравнения* . Вестник Казахстанско-Британского технического университета, т. 21, № 3, 2024, с. 165-175.

- Публикации в материалах международных научных конференций:

1. **Куаныш С.К.** Об одном методе решения нелокальной краевой задачи для параболического уравнения // Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Фараби әлемі». - Алматы: Казахский национальный университет имени аль-Фараби, 4-6 апреля 2024 г. - С. 26.
2. **Kuanysh S.** Algorithm for Solving the Two-Point Boundary Value Problem for Loaded Parabolic Equations // *Proceedings of the CITech-2024 Conference «Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education»*. - Almaty, Kazakhstan, October 23-24, 2024. - P. 93.
3. **Kuanysh S.** Solution of Nonlocal Problem for Loaded Parabolic Equations // *Traditional international April mathematical conference in honor of the Day of Science workers of the Republic of. Kazakhstan*. - Almaty, Kazakhstan, April 1-4, 2025. - P. 158.
4. **Куаныш С.К.** Двухточечная краевая задача для нагруженных параболических уравнений // Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Фараби әлемі». - Алматы: Казахский национальный университет имени аль-Фараби, 3-5 апреля 2025 г. - С. 4.
5. **Куаныш С.** Численное решение периодической задачи для интегро-дифференциальных уравнений параболического типа // Международная научно-практическая конференция «Цифровые технологии и междисциплинарные подходы к решению прикладных задач образования и науки». - Атырау, Казахстан, 3 октября 2025 г. - С. 342.
6. **S.K. Kuanysh,** E.A. Bakirova. A Stable and Convergent Method of Lines for Fredholm-Type Parabolic Integro-Differential Equations//*The First Congress of Kazakhstan Mathematicians*. - Shymkent, Kazakhstan, April 3-7, 2025. - P. 238.
7. **S.K. Kuanysh,** N.B. Iskakova, P.B. Abdimanapova. Convergence, Stability, and Error Analysis of the Method of Lines for Solving Loaded Parabolic Equations // *The First Congress of Kazakhstan Mathematicians*. - Shymkent, Kazakhstan, April 3-7, 2026. - P. 239.
8. **Куаныш С.К.,** Куаныш Ж.К. Классическое решение параболических интегро-дифференциальных уравнений с нелокальными условиями по времени // Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Фараби әлемі». - Алматы: Казахский национальный университет имени аль-Фараби, 7-8 апреля 2026 г.
9. **Kuanysh S.** Numerical Analysis of Parabolic Volterra Integro-Differential Equations // *Fundamental and Applied Issues in Mathematics, Mechanics, and Computer Science* International Scientific Conference. - Karaganda, Buketov Karaganda National Research University, June 3-4, 2026. - P. 61.
10. **S.K. Kuanysh.** Classical Solutions of Parabolic Integro-Differential Equations with Nonlocal-in-Time Boundary Conditions // *Integral Operators in Function Spaces and Harmonic Analysis* International Scientific Conference. - Astana, L.N. Gumilyov Eurasian National University, June 11-14, 2026. - P. 148.

Кроме того, результаты диссертационного исследования были представлены на 14th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (Абу-Даби, ОАЭ, 16–20 декабря 2024 г.), X

Международной научной конференции «Математика, механика и информационные технологии» (Алматы, Казахстан, 24–26 сентября 2025 г.) и International CMMSE Conference and the Fourth Conference on High Performance Computing (CHPC) (Кадис, Испания, 2–9 июля 2026 г.). Материалы данных конференций не были опубликованы.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованных источников. **Первая глава** посвящена исследованию нелокальных краевых задач для нагруженных параболических уравнений. В разделе **1.1** сформулирована постановка нелокальной краевой задачи для нагруженного параболического уравнения. На основе применения метода прямых получена соответствующая дискретизированная задача. В разделе **1.2** для исследования дискретизированной системы нагруженных дифференциальных уравнений применяется классический вариант метода параметризации Джумабаева. Установлены условия однозначной разрешимости и предложен алгоритм построения приближенного решения. В разделе **1.3** исследованы сходимость, устойчивость и точность метода прямых, применяемого к решению рассматриваемых краевых задач. В разделе **1.4** приведены численные примеры и результаты вычислительных экспериментов для нагруженных параболических уравнений. В разделе **1.5** сформулирована постановка начально-краевой задачи для нагруженных параболических уравнений и проведен анализ методов ее решения. В разделе **1.6** доказана теорема об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для нагруженных параболических уравнений.В разделе **1.7** рассмотрено применение метода параметризации Джумабаева к решению дискретизированной задачи и установлены условия ее однозначной разрешимости. В разделе **1.8** предложен алгоритм численного решения начально-краевой задачи для нагруженных параболических уравнений и приведены численные примеры. **Вторая глава** посвящена исследованию нелокальных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма параболического типа. В подразделе **2.1** диссертационной работы сформулирована постановка нелокальной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма параболического типа. В результате применения метода прямых получена дискретизированная нелокальная краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма. В разделе **2.2** для решения полученной дискретизированной нелокальной задачи применен метод параметризации Джумабаева, а также разработан алгоритм решения.В разделе **2.3** исследованы сходимость, устойчивость и точность метода прямых, применяемого к решению нелокальных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма параболического типа. В разделе **2.4** приведены численные примеры для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма параболического типа, а также представлены результаты вычислений, подтверждающие точность предложенного метода и содержащие оценки вычислительной погрешности. В **заключении** обобщены основные научные результаты, полученные в ходе диссертационного исследования, и сформулированы основные выводы.