2-дәріс. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер және оларды интегралдау әдістері

Дәрістің қысқаша мазмұны:

Анықтама 7. y' бойынша шешілетін теңдеу:

$$\frac{dy}{dx} = f(x;y), \quad y' = f(x;y) \tag{9}$$

түрінде жазылады.

Бірінші ретті теңдеудің дифференциалдық пішіні мына түрде болады:

$$M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0 \tag{10}$$

Геометриялық тұрғыдан, (9) теңдеуі әрбір $M(x;y)$ нүктесі үшін интегралдық қисыққа жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффицентінің мәнін береді, яғни, бағыттар өрісін береді.

Ескерту 2. Кей жағдайларда, x-ті y-ке қатысты функция ретінде қарастырсақ $\left(x' = \frac{1}{y'} = \frac{dx}{dy}\right)$, теңдеуді интегралдау жеңілденеді. Сондықтан да, ары қарай x пен y-ті тең құқылы айнымалылар деп есептейміз.

Мысал 4. $F(x,y) = \ln\frac{y}{x} - 5 + xy$ түрінде берілген айқын емес функция $(x + x^2 y)y' = y - xy^2$ дифференциалдық теңдеуінің интегралы болатынын дәлелде.

Шешуі. Айқын емес функцияны дифференциалдау ережесіне сәйкес:

$y' = \frac{F'_x}{F'_e} = -(y - \frac{1}{x})/(x + \frac{1}{y}) = \frac{y}{x}\frac{1-xy}{1+xy} = \frac{y - xy^2}{x + x^2 y}$. Табылған туындыны берілген дифференциалдық теңдеуге қоятын болсақ, тепе-теңдік аламыз.

Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер

Анықтама 8.

$$M(x)\cdot N(y)dx + P(x)\cdot Q(y)dy = 0\ , \tag{11}$$

түріндегі, dx пен dy-тің алдындағы коэффицентері тек x-ке тәуелді функция мен тек y-ке тәуелді функциялардың көбейтінділері болатын дифференциалдық теңдеу айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу деп аталады.

$P(x) \neq 0$, $N(y) \neq 0$ деп есептеп, (11)-теңдеуінің екі жағын да $P(x)\cdot N(y)$ көбейтіндісіне бөліп, интегралдасақ:

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = C\ .$$

Дифференциал теңдеудің жалпы шешімін алдық.

Ескерту 3. $P(x) = 0$, $N(y) = 0$ жағдайлары бөлек зерттеледі. Егер дифференциал теңдеудің ерекше шешімдері бар болса, онда олар берілген алгебралық теңдеудің шешімдері болып табылады.

Мысал 5. Теңдеуді шеш:

$$x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0\ .$$

Шешуі. Бұл айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу. Екі жағын да, $x^2-1\neq 0,\ y^2-1\neq 0$ дей отырып, $(x^2-1)(y^2-1)$ көбейтіндісіне бөлеміз.

$$\frac{x}{x^2-1}dx+\frac{y}{y^2-1}dy\Rightarrow\int\frac{x}{x^2-1}dx+\int\frac{y}{y^2-1}dy=C_1\Rightarrow\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|=\frac{1}{2}\ln C$$

$(x^2-1)(y^2-1)=C$ - жалпы интеграл.

Енді, $x^2-1=0$ және $y^2-1=0$ қарастыралық.

$x=\pm 1$ және $y=\pm 1$ шешімдері берілген дифференциалдық теңдеудің шешімдері болады, бірақ олар жалпы шешімнен $C=0$ болғанда шығады. Сонымен, ерекше шешім жоқ. Жауабы: $(x^2-1)(y^2-1)=C$.

(1) теңдеуінің дербес жағдайы:

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot\varphi(y).$$

Мысал 6.

$$\left(1+e^{2x}\right)y^2y'=e^x,$$

теңдеуінің $y(0)=1$ бастапқы шартын қанағаттандыратын дербес шешімін тап.

Берілген теңдеуді дифференциалдық пішінде жазамыз:

$$\left(1+e^{2x}\right)y^2dy-e^xdx=0.$$

Енді айнымалыларын ажыратсақ:

$$y^2dy-\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=0.$$

Екі жағын да интегралдасақ:

$$\int y^2dy-\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\frac{C}{3},.\qquad\frac{y^3}{3}-arctge^x=\frac{C}{3}\ ,$$

$$y=\sqrt[3]{C+3arctge^x}.$$

Берілген теңдеудің жалпы шешімін алдық.

Бастапқы шартты ескеріп, тұрақтының мәнін анықтаймыз:

$$1=\sqrt[3]{C+\frac{3}{4}\pi},\qquad C=1-\frac{3}{4}\pi.$$

Сонымен, берілген теңдеудің дербес шешімі:

$$y=\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}\pi+3arcte^x}\ .\blacktriangleleft$$