11-дәріс. Тұрақты коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеулер

Дәрістің қысқаша мазмұны:

Жоғарғы ретті сызықтық дифференциал теңдеулерді қарастыралық.

Анықтама 1. Егер сызықты дифференциалдық теңдеудегі:

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \qquad (1)$$

коэффициенттері деп аталатын барлық a_i, $i=\overline{1,n}$ - тұрақты сандар болса, онда ол тұрақты коэффициентті сызықты дифференциалдық теңдеулер деп аталады.

Жоғарғы ретті сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеулер

Оң жағы нөлге тең болатын теңдеулер жүйесінің фундаменталдық шешімдер жүйесін табайық:

$$L[y]=0 \qquad (2)$$

Оның дербес шешімін $y=e^{kx}$ түрінде іздейміз, мұндағы k - қандай да бір тұрақты. Осы тұрақтыны табалық. (2)-ге $y=e^{kx}$ қойсақ:

$$L\left[e^{kx}\right]=e^{kx}\left(k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n\right)=0.$$

$\forall x:\ e^{kx}\neq 0$ болғандықтан, $y=e^{kx}$ (2) теңдеуінің шешімі болады, егер k мінездемелік деп аталатын мынадай алгебралық теңдеудің түбірі болса:

$$k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

$n=2$ жағдайы үшін фундаменталдық шешімдер жүйесін табу мәселесіне тоқталайық:

$$y''+py'+qy=0\ . \qquad (3)$$

Бұл теңдеудің мінездемелік теңдеуі былай болады:

$$k^2+pk+q=0. \qquad (4)$$

Ол алгебралық квадраттық теңдеу болғандықтан, мынадай жағдайлар болуы мүмкін:

1) $D=p^2-4q>0$. Онда $k_1\neq k_2$ - (4) теңдеуінің нақты түбірлері. $y_1=e^{k_1x}$ және $y_2=e^{k_2x}$ дербес шешімдері фундаменталдық шешімдер жүйесін құрайды, себебі

$$W[y_1,y_2]=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^{k_1x} & e^{k_2x}\\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x}\end{vmatrix}=e^{(k_1+k_2)x}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ k_1 & k_2\end{vmatrix}=e^{(k_1+k_2)x}\cdot(k_2-k)\neq 0,$$ өйткені $k_1\neq k_2$.

Сызықты теңдеулердің жалпы теориясын қолданып, (3) теңдеуінің жалпы шешімін аламыз:

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x} \qquad (5)$$

2) $D=p^2-4q<0$. Түбірлері түйіндес комплекс сандар: $k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$. Теңдеудің дербес шешімдері былай болады: $y_{1,2}=e^{(\alpha\pm i\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{\pm i\beta}=e^{\alpha x}(\cos\beta x\pm i\sin\beta x)$.

Сызықты операторлардың қасиеттерінен: $L[U(x)+iV(x)]\Rightarrow L[U]+iL[V]\equiv 0\Rightarrow L[U]=0$ және $L[V]=0$ екендігі шығады, яғни, теңдеудің фундаменталдық шешімдер жүйесі $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ функцияларынан тұрады. Ендеше, теңдеудің жалпы шешімі:

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x). \qquad (6)$$

3) $D = p^2 - 4q = 0$. Онда $k_1 = k_2 = k = -\frac{p}{2}$. Тек бір ғана шешім табамыз: $y_1 = e^{kx}$. Бірінші шешім y_1-ге тәуелсіз теңдеудің екінші шешімін табамыз. Шешімді $y_2 = U(x)e^{kx}$ түрінде іздейміз.

$$L[y] = e^{kx} \cdot \left[u'' + (2k + p)u' + \left(k^2 + pk + q\right)\right] \Rightarrow u'' = 0 \Rightarrow u = Ax + B \Rightarrow |A = 1,\ B = 0| \Rightarrow u = x.$$

Теңдеудің фундаменталдық шешімдер жүйесі мына түрде болады: $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$, себебі $W[y_1, y_2] \neq 0$. Онда берілген дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 xe^{kx}. \qquad (7)$$

Сонымен, жалпы жағдайда, (2) теңдеуінің шешімін алу үшін:

1) мінездемелік теңдеуін құру және оны шешу

2) теңдеудің фундаменталдық шешімдер жүйесін табу:

А) әрбір бір еселі k нақты түбіріне $y = e^{kx}$ дербес шешімі сәйкес келеді.

Б) Бір еселі әрбір $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ комплекс түбірлер жұбына $y_1 = e^{\alpha x} \cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin\beta x$ екі дербес шешім сәйкес келеді.

В) әрбір r - еселі k нақты түбіріне r дербес шешім сәйкес келеді:

$y = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$, $y_3 = x^2 e^{kx}$, …, $x^{r-1}e^{kx}$.

Г) әрбір r -еселі $k = \alpha \pm i\beta$ комплекс түбірлеріне $2r$ шешім сәйкес келеді:

$y_1 = e^{kx}\cos\beta x$, $y_2 = xe^{kx}\cos\beta x$, $y_3 = x^2 e^{kx}\cos\beta x$, …, $y_r = x^{r-1}e^{kx}\cos\beta x$,

$\bar{y}_1 = e^{kx}\sin\beta x$, $\bar{y}_2 = xe^{kx}\sin\beta x$, $\bar{y}_3 = x^2 e^{kx}\sin\beta x$, …, $\bar{y}_r = x^{r-1}e^{kx}\sin\beta x$,

Дербес шешімдердің саны тура n-ге тең және олар фундаменталдық шешімдер жүйесін құрайды.

3) жалпы шешімін жазу: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$.

Мысал 1. Берілген теңдеудің жалпы шешімін тап

$y^{IV} - 2y'' = 0$.

Шешуі.

а) Мінездемелік теңдеуін құрып, оны шешеміз:

$k^4 - 2k^2 = 0 \Rightarrow k^2\left(k^2 - 2\right) = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 0,\ k_{3,4} = \pm\sqrt{2}$.

б) y_1, y_2, y_3, y_4 фундаменталды шешімдер жүйесін табамыз.

$k = 0$ - екі еселі түбір, онда: $y_1 = e^{0x} = 1,\ y_2 = x \cdot e^{0x} = x$.

$k = -\sqrt{2} \Rightarrow y_3 = e^{-\sqrt{2}x}$, $k = \sqrt{2} \Rightarrow y_4 = e^{\sqrt{2}x}$.

в) Жалпы шешімі: $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-\sqrt{2}x} + C_4 e^{\sqrt{2}x}$

Мысал 2. $y^V + 2y''' + y' = 0$

а) $k^5 + 2k^3 + k = 0 \Rightarrow k\left(k^2 + 1\right)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = 0,\ k = \pm i$ - екі еселі түбір.

б) $k = 0 \Rightarrow y_1 = 1,\ k = \pm i \Rightarrow y_2 = \cos x,\ y_3 = \sin x,\ y_4 = x\cos x,\ y_5 = x\sin x$.

в) $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + C_4 x\cos x + C_5 x\sin x$.