***4-дәріс*. Бірінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер.**

Дәрістің қысқаша мазмұны:

Анықтама 11. Егер дифференциал теңдеу ізделінді функция мен оның туындысы бойынша сызықты болса, ондай теңдеуді сызықты дифференциал теңдеу деп атаймыз.

Бірінші ретті сызықты дифференциал теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{13}$$

$$y' + P(x)y = 0, \tag{14}$$

(13) – біртектес емес, ал (14) – біртектес дифференциал теңдеу деп аталады.

Біртектес дифференциал теңдеудің жалпы шешімін табалық:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)dx = 0 \Rightarrow \ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C| \Rightarrow$$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \tag{15}$$

Лагранж әдісін (тұрақты шаманы вариациалау әдісі) қолданып, (13) теңдеуінің шешімін алуға болады. Шешімді (15) түрінде іздейміз, мұндағы $C = C(x)$ - белгісіз функция. Онда (13) теңдеуіндегі y'-тың орнына:

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx},$$

ал y - тің орнына (5)-ті қойсақ:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \Rightarrow$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \Rightarrow C'(x) = Q(x)\cdot e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1$$

Осы табылған $C(x)$-ті (5)-ке қоя отырып, (13) теңдеуінің жалпы шешімін аламыз.

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C_1 + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right) \qquad (16)$$

Ескерту 5. $C_1e^{-\int P(x)dx}$ - (4) теңдеуінің жалпы шешімі, ал $e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ - (13) теңдеуінің дербес шешімі ($C_1 = 0$ болғанда) болғандықтан, кез келген ретті сызықтық теңдеу үшін ақиқат болатын мынадай тұжырым жасауға болады: біртектес емес сызықты теңдеудің жалпы шешімі оған сәйкес біртекті сызықтық теңдеудің жалпы шешімі мен біртексіз сызықты теңдеудің дербес шешімінің қосындысына тең ($C_1 = 0$ болғандағы).

Мысал 10. $(x^2 - x)y' + y = x^2(2x-1)$ теңдеуінің жалпы шешімін тап. Бастапқы шарт *y(-2)=2* болғандағы, Коши есебін шеш.

Берілген теңдеуді екі жағын да $x^2 - x \neq 0$ өрнегіне бөліп, (3) түріне келтіреміз:

$$y + \frac{y}{x^2 - x} = \frac{x^2(2x-1)}{x^2 - x}.$$

Мұнда

$$P(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)},. \qquad Q(x) = \frac{x^2(2x-1)}{x(x-1)}. = \frac{x(2x-1)}{x-1}.$$

Берілген теңдеудің (6) формуласына сәйкес жалпы шешімі:

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x(x-1)}}\left(\int \frac{x(2x-1)}{x-1}e^{\int \frac{dx}{x(x-1)}}dx + c\right). \qquad (17)$$

Осы шешімнің ішіндегі интегралдарды шығаралық:

$$\int\left(\frac{dx}{x(x-1)}\right) = \left|\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)}, A = 1, B = 1.\right| = \int\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)dx = -\ln|x| + \ln|x-1| = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|,$$

$$\int \frac{x(2x-1)}{x-1}e^{\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}dx = \int \frac{x(2x-1)}{x-1}\left|\frac{x-1}{x}\right|dx = \pm\int(2x-1)dx = \pm(x^2 - x),$$

мұндағы $\langle + \rangle$ және $\langle - \rangle$ таңбалары $\left|\frac{x-1}{x}\right| = \pm\frac{x-1}{x}$ теңдігінен шығады. Табылған интегралдарды (7) шешіміне қойсақ, берілген теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$y = e^{-\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}\left(\pm(x^2 - x) + C\right) = \left|\frac{x}{x-1}\right|\left(\pm\left(x^{2-x}\right) + C\right) = \pm\frac{x}{x-1}\left(\pm x(x-1) + C\right) = x^2 + \frac{Cx}{x-1}.$$

y(-2)=2 бастапқы шартын қанағаттандыратын дербес шешімі:

$$2 = 4 - \frac{2C}{-2-1}, C = -3, y = x^2 - \frac{3x}{x-1}. \blacktriangleleft$$

Мысал 11. $y'(3x - y^2) = y$ теңдеуін шеш.

Шешуі. Бұл теңдеу y-ке қатысты сызықты емес. x-ті у тәуелсіз айнымалысына тәуелді функция ретінде қарастырсақ: $x' = \frac{1}{y'}$. Онда

$$\frac{1}{x'}(3x - y^2) = y \Rightarrow 3x - y^2 = x'y \Rightarrow yx' - 3x = -y^2 \Rightarrow x' - \frac{3}{y}x = -y.$$

Бұл теңдеу x-ке қатысты сызықты $P(y) = -\frac{3}{y}, Q(y) = -y$.

(6)-дан,

$$x = e^{\int \frac{3dy}{y}} \cdot (C - \int y \cdot e^{-\int \frac{3dy}{y}} dy) = e^{3\ln y}(C - \int y \cdot e^{-3\ln y} dy) =$$

$$e^{3\ln y}(C - \int y \cdot e^{\ln y^{-3}} dy) = y^3(C - \int \frac{1}{y^2} dy) = y^3(C + \frac{1}{y})$$

$x = Cy^3 + y^2$ - жалпы шешім.

Сонымен қатар, (3) сызықты дифференциал теңдеуін *Бернулли әдісін* қолданып та, интегралдауға болады. Екі белгісіз функция *u(x), v(x)* енгіземіз және *y=u(x)v(x) (Бернулли ауыстыруы)* деп аламыз. Онда $y' = u'v + uv'$. y және y' өрнектерін (3) теңдеуіне қоя отырып, $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$ немесе

$$(v' + P(x)v)u + u'v = Q(x). \quad (8)$$

теңдеуін аламыз. Жақшаның ішіндегі өрнекті $v' + P(x)v = 0$ десек, бұл айнымалысы ажыратылатын дифференциалдық теңдеу. Осы теңдеуді шешіп, *v*-ны табуға болады. Енді жақшаның ішіндегі өрнекті нөлге тең деп алғандықтан, (8) теңдеуі мына түрге келеді: $u + u'v = Q(x)$. Бұл теңдеуге жоғарыда табылған *v*-ны қойсақ, бұл да айнымалылары ажыратылатын теңдеу болады, бұл жерден *u*-ды табамыз. Табылған *u* мен *v*-ны Бернулли ауыстыруына қоятын болсақ, берілген теңдеудің жалпы шешімі шығады.

Мысал 12.

$$y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}$$

дифференциалдық теңдеуін Бернулли әдісін қолданып шеш және бастапқы шарт $y(\pi) = 1$ болғандағы, Коши есебін шығар.

Бернулли ауыстыруын жасаймыз: $y = uv, y' = u'v + uv'$, онда:

$$u'v + uv' + uvtgx = \frac{1}{\cos x}, (v' + vtgx)u + u'v = \frac{1}{\cos x}.$$

$v' + vtgx = 0$ теңдеуінің шешімін іздейміз.

$$dv + vtgxdx = 0, \frac{dv}{v} + vtgxdx = 0,$$

$$\int \frac{dv}{v} + \int tgxdx = 0, \qquad \ln|v| - \ln|\cos x| = \ln C_1.$$

$C_1 = 1$ деп, $v = \cos x.$ шешімін табамыз. Енді $u'v = \frac{1}{cos\, x}$ теңдеуін шешеміз, мұндағы $v = cos\, x.$ $u' = \frac{1}{\cos x},$ $u = \int \frac{1}{\cos x} + C = tgx + C.$

Онда берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = uv = (tgx + C)\cos x.$$

Енді бастапқы шартқа сәйкес дербес шешім іздейміз: $y(\pi) = 1,$ $1 = (0 + C)(-1),$ бұдан $C = -1.$ Табылған C=-1 мәнін жалпы шешімге қойып, теңдеудің дербес шешімін аламыз: $y = (tgx - 1)\cos x = \sin x - \cos x.$ ◄