***13-дәріс*. Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі**

Дәрістің қысқаша мазмұны:

Теорема 7. (1) теңдеуінің жалпы шешімі осы теңдеудің дербес шешімі мен оған сәйкес (2) біртекті теңдеуінің жалпы шешімінің қосындысына тең.

Ендеше, (1) теңдеуінің жалпы шешімін табу үшін :

1) (2) біртекті теңдеуінің жалпы шешімін,

2) (1) теңдеуінің дербес шешімін

табу қажетті.

Тұрақты шаманы вариациялау әдісі (2) теңдеуінің жалпы шешімі белгілі болғанда (1) теңдеуінің дербес шешімін табу үшін қолданылады.

(3) шешімі (2) теңдеуінің жалпы шешімі болсын. (1) теңдеуінің дербес шешімін (3) түрінде іздейміз, C_i, $i=\overline{1,n}$ -ді x-ке тәуелді белгісіз функция деп қарастырамыз. Шешімді табу үшін n шарт қажет. Осы шарттар ретінде мына $(n-1)$ шарт

$$y^{(i)} = C_1 y_1^{(i)} + C_2 y_2^{(i)} + \ldots + C_n y_n^{(i)}, \quad i=\overline{1,n-1} \qquad (4)$$

пен (1) теңдеуін (3) қанағаттандыратын шартты аламыз. (4)-тен $y^{(i)}$ -ді, мұндағы $i=\overline{1,n-1}$, анықтайтын өрнекте C_i, $i=\overline{1,n}$ функциясының туындысы болмауы қажет екенін көруге болады. $C_i(x)$ мынадай жүйе көмегімен анықталады:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}, \qquad (5)$$

бұл n белгісіз C_i'-ке тәуелді сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі. Теңдеулер жүйесінің анықтауышы фундаменталдық шешімдер жүйесі $y_i(x)$ нөлден өзгеше болатын жағдайдағы Вронский анықтауышы. Сондықтан, (5) жүйесінің тек бір ғана шешімі бар: $C_i'(x) = \varphi_i(x)$. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу болатын соңғы теңдіктің екі жағын да интегралдап, $C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx$ табамыз.

Сонымен, (1) теңдеуінің дербес шешімі:

$$y^* = y_1 \int \varphi_1(x)dx + y_2 \int \varphi_2(x)dx + \ldots + y_n \int \varphi_n(x). \qquad (6)$$

Мысал 4. Теңдеудің жалпы шешімін тап:

$$y'' - \frac{y'}{x} = x \qquad (7)$$

Шешуі.

1) $y'' - \frac{y'}{x} = 0$ біртекті теңдеуінің жалпы шешімін тап.

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} \Rightarrow ln\, y' = ln\, x + ln\, 2C_1 \Rightarrow y' = 2C_1 x \Rightarrow \tilde{y} = C_1 x^2 + C_2 .$$

2) (7) теңдеуінің дербес шешімін табамыз. Шешімді $y = C_1(x)\cdot x^2 + C_1(x)$ түрінде іздейміз. Онда $y' = 2C_1 x + C_1' x^2 + C_2'$. y' өрнегі C_1' пен C_2' арқылы өрнектелмеуі керек болғандықтан, $C_1' x^2 + C_2' = 0$ деп аламыз, яғни, $y' = 2C_1 x$. y-ті (5)-ке қойып, екінші шартты табамыз. $y'' = 2C_1 + 2C_1' x$ болғандықтан, $2C_1 + 2C_1' x - \frac{2C_1 x}{x} = x \Rightarrow 2C_1' = 1.$

$C_1(x)$ мен $C_2(x)$ -ні табу үшін:

$$\begin{cases} C_1' = \dfrac{1}{2} \\ C_1'x^2 + C_2' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2}x + C_3 \\ C_2' = -\dfrac{1}{2}x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2}x + C_3 \\ C_2 = -\dfrac{1}{6}x^3 + C_4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \left| C_3 = C_4 \right| \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2}x \\ C_2 = -\dfrac{1}{6}x^3 \end{cases} \right. .$$

Сонымен, теңдеудің дербес шешімі $y^* = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^3}{6} = \dfrac{x^3}{3}$, ал жалпы шешімі – $y = C_1x^2 + C_2 + \dfrac{x^3}{3}$.

Мысал 5.

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \tag{8}$$

теңдеуінің жалпы шешімін тап.

Шешуі. (8) теңдеуіне сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$\widetilde{y} = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}$.

(8) теңдеуінің жалпы шешімін алу үшін, Лагранж әдісін қолданып оның y^* дербес шешімін табамыз. (5) формуласына сәйкес:

$y^* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} + C_3(x)e^{2x}$.

Біздің жағдайымызда (5) жүйесі мына түрде болады:

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{-x} + C_3'e^{2x} = 0 \\ C_1'e^x - C_2'e^{-x} + 2C_3'e^{2x} = 0 \\ C_1'e^x + C_2'e^{-x} + 4C_3'e^{2x} = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1} \end{cases} \tag{9}$$

Оның анықтауышы $W = -6e^{2x} \neq 0$. (9) жүйесін Крамер ережесін қолданып шешсек:

$$C_1' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{e^x + 1};\ C_2' = \frac{1}{6} \cdot \frac{e^{3x}}{e^x + 1};\ C_3' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e^x + 1}. \tag{10}$$

(10)-ды интегралдап, мына теңдіктерді аламыз:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{e^x}{e^x + 1} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(e^x + 1\right)}{e^x + 1} = -\frac{1}{2}\ln\left(e^x + 1\right);$$

$$C_2 = \frac{1}{6}\int \frac{e^{3x}dx}{e^x + 1} = \frac{1}{6}\int \frac{e^{2x}d\left(e^x\right)}{e^x + 1} = \frac{1}{6}\int \left(e^x - 1 + \frac{1}{e^x + 1}\right)de^x;$$

$$C_3 = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{e^x + 1} = \frac{1}{3}\int \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1}dx = \frac{1}{3}\int \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 1}\right)dx = \frac{1}{3}\left(x - \int \frac{d\left(e^x + 1\right)}{e^x + 1}\right) = \frac{1}{3}\left(x - \ln\left(e^x + 1\right)\right)$$

Онда (8) теңдеуінің дербес шешімі:

$$y^* = -\frac{1}{2}e^x \ln\left(e^x+1\right)+\frac{1}{6}e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+\ln\left(e^x+1\right)\right)+\frac{1}{3}e^{2x}\left(x-\ln\left(e^x+1\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{12}e^x-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}xe^{2x}+\left(\frac{1}{6}e^{-x}-\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{3}e^{2x}\right)\ln\left(e^x+1\right).$$

Ал, (8) теңдеуінің жалпы шешімі:

$$y=\tilde{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+\frac{1}{2}\left(4xe^{2x}+e^x-2\right)+\frac{1}{6}\left(e^{-x}-3e^x-2e^{2x}\right)\ln\left(e^x+1\right).$$