Universidad de Sevilla

DEPARTAMENTO DE
ANÁLISIS MATEMÁTICO

e–mail: curbera@us.es
phone: +34–95–455–7995
fax: +34–95–455–7972
web: http://euler.us.es/~curbera

GUILLERMO P. CURBERA
Universidad de Sevilla
Facultad de Matemáticas & IMUS
Calle Tarfia s/n
SEVILLA 41012, SPAIN

April 15, 2026

Report on the PhD thesis

"The spectrum of certain singular integral operators on symmetric spaces"

by Bakytzhan Ozbekbay

The study of Singular Integral Operators has been since long a classical and important topic, arising both from theoretical problems and from problems in mathematical physics. It has connections to Functional Analysis and Operator Theory, Integral Equations, and Harmonic Analysis, as well as Functions Space Theory, in particular, to Symmetric Spaces. As the core of these studies is the Spectral Theory.

The memoir by B. Ozbekbay focuses on operators related to the Hilbert transform and to the generalized Cesàro operator, acting on symmetric spaces. A central outcome of the memoir is the analysis of how the spectrum of the operator depends on the structure of the underlying space, in particular, on the Boyd indices of the symmetric space. This is the natural way to undertake the investigation beyond the classical Lebesgue spaces. Mathematically it is highly nontrivial as it addresses a rather wide family of spaces. It is expected, the situation is more complicate than in the Lebesgue case.

The memoir consists of an Introduction and three chapters. The Introduction presents the motivation, objectives, and current state of the topic. The first chapter contains the necessary preliminaries on symmetric spaces, Lorentz spaces, Boyd indices, and the spectral theory of bounded linear operators. The second chapter is devoted to Hilbert transform and extends known spectral results from classical spaces to the class of symmetric spaces. The third chapter studies generalized Cesàro operators and related spectral problems, by using tools of functional analysis, in particular, methods of semigroup of operators.

The memoir demonstrates that the author has a solid command of modern methods of functional analysis and is able to apply abstract operator-theoretic techniques to concrete problems. The main results are formulated clearly, and the proofs are mathematically correct. The scientific novelty of the memoir lies on obtaining new spectral results for singular integral operators on symmetric spaces and in clarifying the influence of the Boyd indices of these spaces on the spectral description.

In my opinion, the memoir is sound scientific work, developed at a high academic level. It contains new and relevant results on functional analysis and operator theory, and it meets the requirements imposed on PhD dissertations.

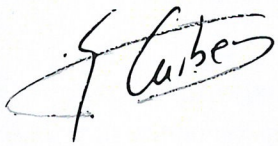
Therefore, I consider that the memoir of Bakytzhan Ozbekbay on the topic *"The spectrum of certain singular integral operators on symmetric spaces"* satisfies all the requirements for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) in the specialty "8D05404 Pure and Applied Mathematics".

My decision is to "Award" the degree.

Guillermo P. Curbera

Professor in Mathematical Analysis

Universidad de Sevilla & IMUS





СЕВИЛЬЯ УНИВЕРСИТЕТІ
МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ КАФЕДРАСЫ

E-mail: curbera@us.es
Тел.: +34-95-455-7995
Факс: +34-95-455-7972

ГИЛЬЕРМО П. КУРБЕРА
Севилья университеті
Математика факультеті және IMUS
Севилья 41012, Испания

2026 жылғы 15 сәуір

«Симметриялық кеңістіктердегі кейбір сингулярлы интегралдық операторлардың спектрі» тақырыбындағы Озбекбай Бакытжанның диссертациясына пікір

Сингулярлы интегралдық операторларды зерттеу ертеден теориялық мәселелерден де, математикалық физикадағы қолданбалы мәселелерден де туындайтын маңызды әрі классикалық бағыт болып табылады. Бұл сала функционалдық анализбен, операторлар теориясымен, интегралдық теңдеулермен, гармоникалық анализбен және функциялық кеңістіктер теориясымен, әсіресе симметриялық кеңістіктер теориясымен тығыз байланысты. Осы зерттеулердің негізінде спектрлік теория жатыр.

Б. Озбекбайдың диссертациялық жұмысы Гильберт түрлендіруімен және жалпыланған Чезаро операторымен байланысты операторларды симметриялық кеңістіктерде зерттеуге арналған. Диссертацияның негізгі нәтижелерінің бірі – оператор спектрінің кеңістіктің құрылымына, әсіресе симметриялық кеңістіктің Бойд индекстеріне қалай тәуелді болатынын талдау болып табылады. Бұл Лебег кеңістіктерінен тыс жағдайларды зерттеудің табиғи жолы болып саналады. Математикалық тұрғыдан бұл өте күрделі мәселе, өйткені ол кеңістіктердің едәуір кең класын қамтиды.

Диссертация кіріспеден және үш тараудан тұрады. Кіріспеде зерттеудің өзектілігі, мақсаттары және тақырыптың қазіргі жағдайы баяндалған. Бірінші тарауда симметриялық кеңістіктер, Лоренц кеңістіктері, Бойд индекстері және шенелген сызықтық операторлардың спектрлік теориясы жөніндегі қажетті алдын ала мәліметтер келтірілген. Екінші тарау Гильберт түрлендіруіне арналған және классикалық кеңістіктерде белгілі спектрлік нәтижелерді симметриялық

кеңістіктер класына жалпылайды. Үшінші тарауда жалпыланған Чезаро операторлары мен оларға қатысты спектрлік мәселелер зерттеледі.

Диссертация автордың қазіргі заманғы функционалдық анализ әдістерін жақсы меңгергенін және операторлар теориясының абстрактілі тәсілдерін нақты есептерге қолдана алатынын көрсетеді. Негізгі нәтижелер анық әрі түсінікті түрде тұжырымдалған, ал дәлелдеулер математикалық тұрғыдан дұрыс берілген. Жұмыстың ғылыми жаңалығы симметриялық кеңістіктердегі сингулярлық интегралдық операторлар үшін жаңа спектрлік нәтижелер алуында және осы кеңістіктердің Бойд индекстерінің спектрлік сипаттамаға әсерін нақтылауында жатыр.

Менің пікірімше, бұл диссертация жоғары академиялық деңгейде орындалған сапалы ғылыми жұмыс болып табылады. Онда функционалдық анализ бен операторлар теориясы салалары үшін жаңа әрі маңызды нәтижелер алынған және жұмыс PhD диссертацияларына қойылатын талаптарға толық сәйкес келеді.

Сондықтан мен Бакытжан Озбекбайдың «Симметриялық кеңістіктердегі кейбір сингулярлық интегралдық операторлардың спектрі» тақырыбындағы диссертациясы «8D05404 – Іргелі және қолданбалы математика» мамандығы бойынша Философия докторы (PhD) дәрежесін беруге лайықты деп есептеймін.

Қорытынды шешімім: философия докторы (PhD) дәрежесін беру.

Гильермо П. Курбера
Математикалық анализ профессоры
Севилья университеті және IMUS