9-дәріс. **Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулердің негізгі түрлері және оны интегралдау әдістері. Реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулер.**

Дәрістің қысқаша мазмұны:

1. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$ түріндегі теңдеу.

Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулердің әртүрлі түрлерін қарастырамыз.

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (6)$$

- бұл дифференциалдық теңдеудің құрамына ізделініп отырған y функциясы мен оның (k-1)-ретке дейінгі туындылары кірмейді. Бұл жағдайда, ретін төмендету мына ауыстыру көмегімен жүзеге асырылады: $y^{(k)} = z, y^{(k+1)} = z', ..., y^{(n)} = z^{(n-k)}$

Мысал 6. $y''' - y'' = 0 \Rightarrow \left| y'' = z, y''' = z' \right| \Rightarrow z' - z = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = C_1 e^{\int dx} = C_1 e^x \Rightarrow y'' = C_1 e^x \Rightarrow y' = \int C_1 e^x dx + C_2 = C_1 e^x + C_2 \Rightarrow$$

$$y = \int \left[C_1 e^x + C_2 \right] dx \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 x + C_3$$

Мысал 7. Коши есебін шеш:

$$xy'' - y' - x \sin \frac{y'}{x} = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Шешуі. берілген теңдеу (6) түріндегі теңдеуге жатады. Жаңа функция $y' = p, \; y'' = p'$ енгіземіз, теңдеудің екі жағын да x-ке бөліп, берілген теңдеу мына түрге келеді: $p' - \frac{p}{x} - \sin \frac{p}{x} = 0$ немесе $p' = \frac{p}{x} + \sin \frac{p}{x}$. Теңдіктің оң жағы $\frac{p}{x} + \sin \frac{p}{x}$ -нөлінші ретті біртекті функция, ендеше бұл біртекті дифференциалдық теңдеу. $p = zx, \; p' = z'x + z$ ауыстыруын жасаймыз. Онда $z'x + z - z - \sin z = 0$,яғни, $z'x - \sin z = 0$ теңдеуін шешеміз. Айнымалыларды ажырату арқылы: $\frac{dz}{\sin z} = \frac{dx}{x}$ $\ln \left| tg \frac{z}{2} \right| = \ln x + \ln c_1$, $tg \frac{z}{2} = xc_1$, $z = 2arctgxc_1$. Теңдеудегі z -тің орнына жоғарыдағы ауыстыруларды қоятын болсақ:

$p = zx,\ \ z = \dfrac{y'}{x}$, онда $y' = 2xarctgxc_1 \ \rightarrow \ \int dy = \int 2xarctgxc_1 dx$. Ары қарай бөліктеп интегралдасақ: $U = arctgxc_1,\ dU = \dfrac{c_1 dx}{1+(xc_1)^2},\ dV = 2xdx,\ \ V = x^2,$

$$y = x^2 arctgxc_1 - \int \frac{c_1 x^2}{1+(xc_1)^2}\,dx = x^2 arctgxc_1 - \frac{1}{c_1}\int \frac{1+c_1^2x^2-1}{1+(xc_1)^2}\,dx =$$

$$= x^2 arctgxc_1 - \frac{1}{c_1}x + \frac{1}{c_1^2}arctgxc_1 + c_2 = \left(x^2 + \frac{1}{c_1^2}\right)arctgxc_1 - \frac{1}{c_1}x + c_2$$ аламыз.

Сонымен, берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$y = x^2 arctgxc_1 - \dfrac{1}{c_1}x + \dfrac{1}{c_1^2}arctgxc_1 + c_2$ немесе

$$y = \left(x^2 + \frac{1}{c_1^2}\right)arctgxc_1 - \frac{1}{c_1}x + c_2.$$

Теңдеудің дербес шешімін табу үшін бірінші табылған функцияның туындысын табамыз:

$$y' = 2xarctgxc_1 + \left(x^2 + \frac{1}{c_1^2}\right)\cdot\frac{c_1}{1+x^2c_1^2} - \frac{1}{c_{1\,1}}.$$

Берілген $y(1) = \dfrac{\pi}{2},\quad y'(1) = \dfrac{\pi}{2}$ бастапқы шартты ескерсек:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} = \left(1^2 + \dfrac{1}{c_1^2}\right)arctg1\cdot c_1 - \dfrac{1}{c_1}\cdot 1 + c_2 \\ \dfrac{\pi}{2} = 2\cdot 1\cdot arctg(1\cdot c_1) + \left(1^2 + \dfrac{1}{c_1^2}\right)\cdot\dfrac{c_1}{1+1^2c_1^2} - \dfrac{1}{c_1} \end{cases}$$

Жүйенің соңғы теңдеуінен c_1 тұрақтысын анықтаймыз:

$$\frac{\pi}{2} = 2arctgc_1 + \frac{c_1^2+1}{c_1^2}\cdot\frac{c_1}{1+1^2c_1^2} - \frac{1}{c_1},\qquad arctgc_1 = \frac{\pi}{4} \ \Rightarrow\ c_1 = 1.$$

Бірінші теңдеуден c_2 тұрақтысын анықтаймыз:

$$\frac{\pi}{2} = \left(1^2 + \frac{1}{1^2}\right)arctg1 - \frac{1}{1}\cdot 1 + c_2,\ \ \frac{\pi}{2} = 2\cdot\frac{\pi}{4} - 1 + c_2,\quad c_2 = 1.$$

Сонымен, $c_1 = 1,\quad c_2 = 1.$

Ендеше, ізделінді дербес шешім:

$y = \left(x^2+1\right)arctgx - x + 1.$

2. $F(y\ , y', ..., y^{(n)}) = 0$ түріндегі теңдеу

$$F(y\ , y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (7)$$

түріндегі дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз. Бұл жоғарғы ретті бұл теңдеудің түріне тәуелсіз айнымалы x кірмейді. Бұл жағдайда мынадай белгілеу енгіземіз:

$y' = \frac{dy}{dx} = p$. Күрделі функцияны дифференциалдау ережесін қолданып, мына теңдіктерді аламыз:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{dp}{dx}\frac{dp}{dy} + p\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\right) \cdot \frac{dy}{dy} = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2}, \ldots \quad .$$

Дәл осылай, одан да жоғарғы ретті туындыларын тауып, орнына қойсақ $y^{(k)}$ туындылары $p=p(y)$ функциясының y-тен тәуелді $k-1$ реттен аспайтын туындылары арқылы өрнектелетіні анық, бұл теңдеудің иретін бір санға келтіруге мүмкіндік тудырады. Бұл жағдайды мысал көмегімен қарастырып көрелік.

Мысал 8. $yy'' - (y')^2 = y'$ теңдеуін шеш.

Шешуі. Жаңа функция енгіземіз: $y' = p\,; y'' = p'_y \cdot p$, онда

$$ypp' - p^2 = p \Rightarrow p' - \frac{1}{y}p = \frac{1}{y} \Rightarrow p = e^{\int \frac{dy}{y}} \cdot \left(C_1 + \int \frac{1}{y} \cdot e^{-\int \frac{dy}{y}} dy\right) =$$

$$= y\left(C_1 + \int \frac{dy}{y^2}\right) = y\left(C_1 - \frac{1}{y}\right) = C_1 y - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 y - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{C_1 y - 1} = dx \Rightarrow \frac{1}{C_1} \cdot \ln|C_1 y - 1| = x + C_2.$$

Мысал 9. $y'' - 2yy' = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін тап.

Шешуі. Теңдеуді шешу үшін, жаңа функция енгіземіз $p(y) = y'$. Онда

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} \quad , \quad p\frac{dp}{dy} - 2yp = 0 \ , \quad \frac{dp}{dy} - 2y = 0 \ , \ p = y^2 + c_1^2 \ ,$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + c_1^2 \ , \quad \int \frac{dy}{y^2 + c_1^2} = \int dx \ , \ \frac{1}{c_1} arctg\frac{y}{c_1} = x + c_2 \ , \ arctg\frac{y}{c_1} = c_1 x + c_2 c_1 \ .$$

Сонымен, берілген теңдеудің жалпы шешімі:
$y = c_1 tg(c_1 x + \bar{c}_2)$, мұндағы $\bar{c}_2 = c_2 c_1$

3. $y^{(n)} = f(x)$ түріндегі теңдеу .

$y^{(n)} = f(x)$ түріндегі, яғни, оң жағы тек х айнымалысына ғана тәуелді болатын дифференциалдық теңдеуді қарастырайық.

Онда $y = \int\int \ldots \int f(x)dxdx \ldots dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$ - теңдеудің жалпы шешімі.

Мысал10. $xy''' = 2x + 3$ теңдеуінің жалпы шешімін тап.

Шешуі. Алдымен теңдеуді (1) түріне келтіреміз:

$$y''' = \frac{2x+3}{x}$$

(2) формулаға сәйкес біртіндеп интегралдасақ:

$$y'' = \int \frac{2x+3}{x} dx = \int \left(2 + \frac{3}{x}\right) dx = 2x + 3ln\,x + C_1,$$

$$y' = \int (2x + 3\ln x + C_1)dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x,\ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx,\ v = x_1 \end{matrix} \right| = x^2 + 3x\ln x - 3x + Cx_1 + C_2 .$$

$$y = \int \left(x^2 + 3x\ln x - 3x + + Cx_1 + C_2\right)dx = \frac{x^3}{3} + 3\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x}\right) - \frac{3x^2}{2}$$

$$+ \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 = = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\ln x - \frac{3x^2}{4} - \frac{3x^2}{2} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 =$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\ln x + \overline{C}_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3, \text{ мұндағы } \quad \overline{C}_1 = \frac{C_1}{2} - \frac{4}{3} - \frac{3}{2}.$$