***10-дәріс*. Сызықтық дифференциалдық жоғарғы ретті теңдеулер. Функциялардың сызықты тәуелділігі. Вронский анықтауышы**

Дәрістің қысқаша мазмұны:

Анықтама 1. n - ші ретті сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеу деп мына түрдегі теңдеуді айтамыз:

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \qquad (1)$$

мұндағы $a_i=a_i(x),\ i=\overline{1,n}$ теңдеудің коэффиценттері, қандай да кесіндіде үзіліссіз функциялар.

Теңдеудің оң жағы $L[y]\equiv y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny$ сызықтық оператор деп аталады. $L[y_1\pm y_2]\equiv L[y_1]+L[y_2]$ және $L[Cy]\equiv CL[y]$ теңдігі орындалатынына оңай көз жеткізуге болады, $C-const$.

Теорема 1 (Пикар). Қандай да бір D облысының барлық нүктелерінде үзіліссіз болатын $a_i=a_i(x),\ i=\overline{1,n}$ және $f(x)$ функциялары үшін (1) Коши есебінің тек жалғыз ғана шешімі табылады.

Ары қарай, біз $a_i=a_i(x),\ i=\overline{1,n}$ және $f(x)$ функцияларын D облысында үзіліссіз деп қарастырамыз.

1. Сызықтық біртекті теңдеудің жалпы шешімі.

$$L[y]=0 \qquad (2)$$

Анықтама 2. $y_1,y_2,\ldots,y_m$ функциялары $(a;b)$ аралығында сызықты тәуелді деп аталады, егер төмендегі теңдеуді қанағаттандыратын барлығы бірдей нөлге тең емес $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$, тұрақтылары табылатын болса:

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\ldots+\alpha_my_m=0\ , \qquad \forall x\in(a;b)$$

кері жағдайда, сызықты тәуелсіз деп аталады.

Мысал 1.

а) $y_1=x,\quad y_2=x^2,\quad y_3=3x,\quad y_4=2x-x^2$ - функциялары $(-\infty;\infty)$ аралығында сызықты тәуелді, себебі:

1) $\alpha_1=-3,\alpha_2=0,\alpha_3=1,\alpha_4=0\Rightarrow -3y_1+0\cdot y_2+y_3+0\cdot y_4=-3y_1+y_3=-3x+3x\equiv 0\Rightarrow y_3=$

2) $\alpha_1=-2,\alpha_2=1,\alpha_3=0,\alpha_4=1\Rightarrow -2y_1+y_2+y_4=-2x+x^2+(2x-x^2)\equiv 0\Rightarrow y_4=2y_1-y$

б) $1,\ x,\ x^2$ функциялары $(-\infty;\infty)$ аралығында сызықты тәуелсіз, себебі $\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3x^2=0$ теңдігі барлық x үшін емес, тек x -тің екі мәні үшін ғана орынды.

Сызықты тәуелді $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функцияларының $(n-1)$ - ші ретке дейінгі туындылары бар болса, онда олар Вронский анықтауышы деп аталатын:

$$W[y_1; y_2; \ldots; y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$ анықтауыш көмегімен анықталады.

Теорема 2. Егер $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функциялары $(a;b)$, аралығында сызықты тәуелді болса, онда осы $(a;b)$ аралығында $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \equiv 0$.

Теорема 3. Егер (2) теңдеуінің дербес шешімдері $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $(a;b)$ аралығында сызықты тәуелсіз функциялар болса, онда $\forall x \in (a\ ;\ b)$: $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$.

Анықтама 3. Кез келген (2) теңдеуінің n сызықты тәуелсіз дербес шешімдер жүйесі фундаментальдық шешімдер жүйесі деп аталады.

Теорема 4. (2) дифференциалдық теңдеуінің әрқашанда фундаменталдық шешімдер жүйесі табылады.

Теорема 5. Егер $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - (2) теңдеуінің дербес шешімдері болса, онда

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad (3)$$

мұндағы C_i, $i = \overline{1,n}$ - кез келген тұрақтылар және бұл да (2) теңдеуінің шешімі болады.

(3) шешімінде n тұрақты бар. Қандай шарт орындалғанда (3) шешімі (2) теңдеуінің жалпы шешімі болады.

Теорема 6. Егер (2) теңдеуінің дербес шешімдері $y_1, y_2, \ldots, y_n$ фундаменталдық шешімдер жүйесін құраса, онда (3) шешімі (2) теңдеуінің жалпы шешімі болады.

Мысал 2. e^x, e^{-x}, e^{2x} функциялар жүйесі $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ теңдеуінің фундаментальдық шешімдер жүйесі болатынын көрсет және оның жалпы шешімін жаз.

Шешуі: $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}, y_3 = e^{2x}$ функциялары мен оның туындыларын берілген теңдеуге қою арқылы олар теңдеудің шешімі болатынына көз жеткізуге болады. Оның вронскианы:

$$W(e^x, e^{-x}, e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^x e^{-x} e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -6e^{2x} \neq 0.$$

Ендеше, e^x, e^{-x}, e^{2x} сызықты тәуелсіз функциялар және берілген теңдеудің фундаментальдық шешімдер жүйесін құрайды. Оның жалпы шешімі (4) формуласына сәйкес:

$$\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}.$$

Мысал 3. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x + 1$ теңдеуінің жалпы шешімін жаз, егер оның дербес шешімдерінің біреуі $y^* = x + 1$ функциясы болса.

Шешуі: Сәйкес біртекті дифференциал теңдеудің жалпы шешімі $\tilde{y}$ 2-мысалда табылған, онда теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = \tilde{y} + y^* \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + x + 1.$$