12-дәріс. Жоғарғы ретті біртекті емес сызықтық дифференциалдық теңдеулер

Дәрістің қысқаша мазмұны:

Тұрақты коэффицентті және оң жағы квазиполином (көрсеткіштік функцияға көбейтілген көпмүшелік) деп аталатын $f(x)$ функциясы болатын дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін тұрақты шаманы вариациалау әдісін қолданбай, басқа оңай әдіспен шығаруға болады.

$P_n(x)$ және $Q_m(x)$ сәйкесінше n-ші және m-ші дәрежелі көпмүшеліктер, ал r саны мінездемелік теңдеудің түбірі α $(\alpha \pm i\beta)$-ның еселігі болсын, егер α $(\alpha \pm i\beta)$ мінездемелік теңдеудің түбірі болмаса, онда $r = 0$.

Егер

1. $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, онда дербес шешімді мына түрде іздейміз: $y^* = x^r \overline{P}_n(x)e^{\alpha x}$, (8)

мұндағы $\overline{P}_n(x)$ - коэффицеттері белгісіз көпмүшелік.

2. $f(x) = [P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$, онда $\bar{y} = x^r [U_k(x)\cos\beta x + V_k(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$, (9)

мұндағы $k = max(n, m)$, ал U_k және V_k - коэффицеттері белгісіз көпмүшеліктер.

Мысал 3. Берілген теңдеудің жалпы шешімін тап:

$$y'' + 4y' + 3y = xe^{-x} \qquad (10)$$

Шешуі.

$y'' + 4y' + 3y = 0$ біртекті теңдеуінің жалпы шешімін табамыз.

$k^2 + 4k + 3 = 0 \Rightarrow k_1 = -1, k_2 = -3 \Rightarrow \tilde{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$.

(10) теңдеуінің дербес шешімін табалық: $f(x) = xe^{-x} \Rightarrow P_n(x) = x$, $\alpha = -1$ - бір еселі түбір $(\alpha = k_1) \Rightarrow r = 1, \overline{P}_n(x) = ax + b, y^* = x(ax + b)e^{-x}$, мұндағы a және b сандарын y^* (10) теңдеуінің шешімі болатындай етіп алуымыз керек.

$(y^*)' = [-ax^2 + (2a - b)x + b]e^{-x} \Rightarrow (y^*)'' = [ax^2 - (4a - b)x + 2a - 2b]e^{-x}$.

Табылған y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$-терді (10) теңдеуіне қоямыз және x-тің бірдей дәрежесінің коэффицеттерін теңестіре отырып, белгісіз коэффицеттерді табамыз:

$$\{[-ax^2 - (4a - b) + 2a - 2b] + 4[-ax^2 + (2a - b)x + b] + 3[ax^2 + bx]\}e^{-x} = xe^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4ax + (2a + 2b) \equiv x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{4},\ b = -\frac{1}{4}.$$

Теңдеудің дербес шешімі $y^* = \frac{1}{4}x(x-1)e^{-x}$, ал жалпы шешімі $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{4}x(x-1)e^{-x}$.

Мысал 4. $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$.

Шешуі: $k^2 + 2k + 5 = 0 \Rightarrow D = 4 - 20 = -16 = 4i^2 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i \Rightarrow$

$\tilde{y} = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^{-x}$ - біртекті теңдеудің жалпы шешімі.

$f(x) = 2\cos x = 2\cos x \cdot e^{ox} \Rightarrow P_n(x) = 2, Q_m(x) \equiv 0, \alpha = 0, \beta = 2 \Rightarrow \alpha \pm \beta i = \pm 2i$ мінездемелік теңдеудің түбірі болмайды, яғни,

$(\pm 2i \neq k_{1,2}) \Rightarrow r = 0, U_k(x) = A, V_k(x) = B$, $y^* = r^0(A\cos x + B\sin x)\cdot e^{0x} = A\cos x + B\sin x \Rightarrow (y^*)' = B\cos x - A\sin x \Rightarrow (y^*)'' = -A\cos x - B\sin x$. Табылған y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ - терді теңдеуге қойсақ:

$$(2B+4A)\cos x+(4B-2A)\sin x\equiv 2\cos x\Rightarrow$$

$$\begin{cases}2B+4A=2\\4B-2A=0\end{cases}\Rightarrow A=\frac{2}{5},\quad B=\frac{1}{5}\Rightarrow y^*=\frac{2}{5}cos\,x+\frac{1}{5}sin\,x.$$

Онда жалпы шешім:

$$y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{-x}+\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$$

Мысал 5 . Теңдеудің жалпы шешімін тап: $y^{IV}-3y''=9x^2$

Шешуі. Мінездемелік теңдеуді құра отырып, оны шешіп, фундаменталдық шешімдер жүйесін табамыз және сәйкес біртекті дифференциал теңдеудің жалпы шешімін $\tilde{y}$ табамыз:

$$\lambda^4-3\lambda^2=0,\ \lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_{3,4}=\pm\sqrt{3}.$$

$$\tilde{y}=C_1+C_2x+C_3e^{x\sqrt{3}}+C_4e^{-x\sqrt{3}}.$$

Мұнда α=0. Мінездемелік теңдеудің $\lambda_1=\lambda_2=0$ екі еселі түбірі α=0-мен беттеседі, ендеше, r=2 . Теңдеудің дербес шешімі (8) формулаға сәйкес $y^*=x^2(Ax^2+Bx+C)$ түрінде болады. Туындыларын есептелік:

$$(y^*)'=4Ax^3+3Bx^2+2Cx$$

$$(y^*)''=12Ax^2+6Bx+2C$$

$$(y^*)'''=24Ax+6B$$

$$(y^*)^{IV}=24A.$$

Табылған $(y^*)''$, $(y^*)^{IV}$ -терді берілген теңдеуге қойсақ:

$$(y^*)^{IV}-3(y^*)''=-36Ax^2-18Bx-6C+24\equiv 9x^2$$

x айнымалысының бірдей дәрежесінің оң жағы мен сол жағын теңестіре отырып, A,B,C белгісіздерін анықтауға болатын алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases}-36A=9\\-18B=0\\-6C+24A=0\end{cases}$$

бұдан A=-1/4 , B=0, C=-1. Сонымен,

$$y^*=x^2(-\frac{1}{4}x^2-1).$$

Ендеше, берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y=\tilde{y}+y^*=C_1+C_2x+C_3e^{x\sqrt{3}}+C_4e^{-x\sqrt{3}}\cdot+x^2(\frac{-1}{4}x^2-1).$$

Мысал 6. Коши есебін шеш:

$$y''-7y'+6y=(x-2)e^x,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=3.$$

Шешуі. $\lambda^2-7\lambda+6=0$ мінездемелік теңдеудің түбірлері $\lambda_1=1,\lambda_2=6$ болғандықтан, берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі $\tilde{y}=C_1e^x+C_2e^{6x}$.

Теңдеудің оң жағына мән берсек, α=1; $P_1(x)=x-2;$ α мінездемелік теңдеудің түбірі болғандықтан $r=1$ және берілген теңдеудің дербес шешімін $y^*=xe^x(Ax+B)$ түрінде іздейміз.

$y^{*''}-7y^{*'}+6y^{*}=e^{x}((6A-7A+A)x^{2}+(6B-7B-14A+2A+B+2A)x-7B+2A+2B)\equiv e^{x}(x-$

Теңдіктің екі жағын да e^{x}-ке қысқартып, x айнымалысының бірдей дәрежесінің оң жағы мен сол жағын теңестірсек:

$$\begin{cases}-10A=1\\2A-5B=-2\end{cases},$$

бұдан $A=-1/10,\ B=9/25$ және дербес шешім:

$$y^{*}=e^{x}(-\frac{1}{10}x^{2}+\frac{9}{25}x).$$

Берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y=C_{1}e^{x}+C_{2}e^{6x}+e^{x}(-\frac{1}{10}x^{2}+\frac{9}{25}x).$$

Енді Коши есебін шешу үшін, y'-ті табамыз:

$$y'=C_{1}e^{x}+6C_{2}e^{6x}+e^{x}(-\frac{1}{10}x^{2}+\frac{9}{25}x)+e^{x}(-\frac{1}{5}x+\frac{9}{25}).$$

Бастапқы шарттарды ескере отырып, мынадай жүйе аламыз:

$y(0)=C_{1}+C_{2}=1,\quad y'(0)=C_{1}+6C_{2}+9/25=3,$

бұдан: C_{1}=84/125 , C_{2} =41/125.

Сонымен, берілген бастапқы шартты қанағаттандыратын теңдеудің дербес шешімі:

$$y=\frac{84}{125}e^{x}+\frac{41}{125}e^{6x}+e^{x}(-\frac{1}{10}x^{2}+\frac{9}{25}x).$$

Мысал 7. Берілген теңдеудің жалпы шешімін тап: $y''+y=x\sin x+\cos 2x$ (11)

Шешуі. $\lambda^{2}+1=0$ мінездемелік теңдеуінің түбірлері $\lambda_{1}=i,\ \lambda_{2}=-i$, онда $y''+y=0$ біртекті теңдеуінің жалпы шешімі (6) формуласына сәйкес $\tilde{y}=C_{1}\cos x+C_{2}\sin x$ болады.

Берілген (11) дифференциал теңдеуінің оң жағы екі квазиполиномның қосындысына тең: $f_{1}(x)=x\sin x,\ f_{2}(x)=\cos 2x$. Сондықтан, (9) формуласын қолданып, алдымен

$y''+y=x\sin x$

теңдеуінің дербес шешімі y_{1}^{*}-ті табамыз , одан кейін

$y''+y=\cos 2x$

теңдеуінің y_{2}^{*} дербес шешімін табамыз.

(11) теңдеуінің оң жағы $f_{1}(x)$үшін: $a=0,\ b=1,\ \lambda=i=\lambda_{1}$, сондықтан $r=1$ және

$.y_{1}^{*}=x((Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x)$.

$y_{1}^{*''}+y_{1}^{*}=(Ax^{2}+Bx+2Cx+2A+D-Ax^{2}-Bx+2Cx+D)\cos x+$

$+9Cx^{2}+Dx-Cx^{2}-2Ax-Dx-B-2Ax-B+2C)\sin x\equiv x\sin x$.

Ұқсас мүшелердің коэффициенттерін теңестіре отырып, A,B,C,D және y_{1}^{*} табамыз :

$$\left.\begin{array}{ll}x\cos x & 4C=0,\\ \cos x & 2A+2D=0,\\ x\sin x & -4A=1,\\ \sin x & -2B+2C=0,\end{array}\right\}$$

бұдан $A=-1/4,\ B=0,\ C=0,\ D=1/4$. Сонымен,

$y_1^* = x(-\frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}\sin x) = \frac{1}{4}x(\sin x - x\cos x)$.

(11) теңдеуінің оң жағы $f_2(x)$ үшін: $a = 0,\ b = 2,\ \lambda = 2i$, сондықтан $r = 0$ және $y_2^* = M\cos 2x + N\sin 2x$.

Ары қарай, ұқсас мүшелердің коэффициенттерін теңестірсек:

$$\begin{array}{l|l} 1 & y_2^* = M\cos 2x + N\sin 2x, \\ 0 & y_2^{*\prime} = -2M\sin 2x + 2N\cos 2x, \\ 1 & y_2^{*\prime\prime} = -4M\cos 2x - 4N\sin 2x, \end{array}$$

$y_2^{*\prime\prime} + y_2^* = -3M\cos 2x - 3N\sin 2x \equiv \cos 2x$

$-3M = 1,\ -3N = 0$ болады және $y_2^* = -\frac{1}{3}\cos 2x$.

Сонымен, $y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{1}{4}x(\sin x - x\cos x) - \frac{1}{3}\cos 2x$

және берілген теңдеудің жалпы шешімі мына түрде болады:

$y = \tilde{y} + y^* = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{4}x(\sin x - x\cos x) - \frac{1}{3}\cos 2x$.

Мысал 8. Коши есебін шеш:

$y'' - 2y' + 5y = 3e^x + e^x tg2x,\quad y(0) = 3/4,\ y'(0) = 2.$ (12)

Шешуі. Сәйкес біртекті теңдеудің $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ мінездемелік теңдеуінің түбірлері $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$. Онда $y'' - 2y' + 5y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімі (6) формуласы бойынша:

$\tilde{y} = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

(12) теңдеуінің оң жағы екі функцияның қосындысы ретінде берілген. Оның біріншісі $f_1(x) = 3e^x$ үшін: $P_r(x) = 3,\ a = 1,\ b = 0,\ \alpha = 1 \neq \lambda_{1,2}$. Сондықтан, $y'' - 2y' + 5y = 3e^x$ теңдеуінің дербес шешімі y_1^*-ді былай іздейміз: $y_1^* = Ae^x$, мұндағы A белгісізі берілген теңдеуге y_1^*-ны қою көмегімен табылады.

Екінші функция $f_2(x) = e^x tg2x$ квазиполином емес және $y'' - 2y' + 5y = e^x tg2x$ теңдеуінің дербес шешімі y_2^*-ны тұрақты шаманы вариациалау әдісімен (Лагранж әдісі) бойынша табылады. Әйгілі теоремаға сәйкес:

$y_2^* = e^x(C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x)$.

Біздің жағдайымызда жүйе екі теңдеуден тұрады:

($y_1 = e^x\cos 2x,\ y_2 = e^x\sin 2x$):

$$\left.\begin{array}{l} C_1'e^x\cos 2x + C_2'e^x\sin 2x = 0, \\ C_1'e^x(\cos 2x - 2\sin 2x) + C_2'e^x(\sin 2x + 2\cos 2x) = e^x tg2x. \end{array}\right\}$$

Жүйедегі теңдеулердің екі жағын да e^x-ке қысқартып:

$$\left.\begin{array}{l} C_1'\cos 2x + C_2'\sin 2x = 0, \\ C_1'(\cos 2x - 2\sin 2x) + C_2'(\sin 2x + 2\cos 2x) = tg2x. \end{array}\right\}$$

Соңғы жүйенің анықтауышы (вронскиан):

$$W = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \cos 2x - 2\sin 2x & \sin 2x + 2co2x \end{vmatrix} = 2.$$

Крамер формуласын қолданып:

$$C_1' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ tg2x & \sin 2x + 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\sin 2x\, tgx,$$

$$C_2' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ \cos 2x - 2\sin 2x & tg2x \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Енді табылған теңдікті интегралдасақ:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1-\cos^2 2x}{\cos 2x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos 2x} + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{4}\ln|tg(\pi/4 - x)| + \frac{1}{4}\sin 2x,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x.$$

Сонымен,

$$y_2^* = e^x(\frac{1}{4}\ln|tg(\frac{\pi}{4} - x)|\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\cos 2x -$$

$$\frac{1}{4}\sin 2x\cos 2x) = \frac{1}{4}e^x \ln|tg(\frac{\pi}{4} - x)|\cos 2x.$$

Ендеше, берілген теңдеудің дербес шешімі:

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^x ln|tg(\frac{\pi}{4} - x)|cos 2x = \frac{1}{4}e^x(3 + ln|tg(\frac{\pi}{4} - x)|cos 2x),$$

Ал оның жалпы шешімі:

$$y = \tilde{y} + y^* = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{1}{4}e^x(3 + \ln|tg(\frac{\pi}{4} - x)|\cos 2x). \qquad (13)$$

Енді Коши есебін шешу үшін, y'-ті табамыз:

$$y' = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + e^x(-2C_1\sin 2x + 2C_2\cos s2x) +$$

$$+\frac{1}{4}e^x(3 + \ln|tg(\pi/4 - x)|\cos 2x) +$$

$$+\frac{1}{4}e^x(-\frac{\cos 2x}{tg(\pi/4 - x)\cos^2(\pi/4 - x)} - 2\ln|tg(\pi/4 - x)|\sin 2x).$$

Берілген бастапқы шарттарды қолдансақ:

$y(0) = 3/4 = C_1 + 3/4, \quad y'(0) = 2 = 2C_2 + 3/4 - 1/2,$

бұдан $C_1 = 0,\ C_2 = 7/4.$

Сонымен, ізделінді дербес шешім:

$$y = \frac{1}{4}e^x(3 + 7\sin 2x + \ln|tg(\pi/4 - x)|\cdot\cos 2x).$$