әл - Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

ӘОЖ 517.98 (043) Қолжазба құқығында

ОЗБЕКБАЙ БАКЫТЖАН ОРЫНГАЛИУЛЫ

Симметриялық кеңістіктерде анықталған кейбір сингулярлы интегралдық операторлардың спектрі

8D05404 - Іргелі және қолданбалы математика

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші
PhD, профессор
Туленов К.С.

Шетелдік ғылыми кеңесші
PhD, профессор
Курбера П.Г. (Севилья, Испания)

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2026

МАЗМҰНЫ

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР..... 3
КІРІСПЕ 4
1 НЕГІЗГІ АНЫҚТАМАЛАР МЕН БЕЛГІЛЕУЛЕР
1.1 Симметриялық функциялар кеңістігі 10
1.2 Сызықты шенелген операторлардың спектрлік теориясы 18
1.3 Күшті үзіліссіз жартытоптар мен топтар 24
1.4 Секторлық операторлар және функционалдық қисап 27
2 ГИЛЬБЕРТ ТҮРЛЕНДІРУІНІҢ СПЕКТРІ
2.1 Гильберт түрлендіруі және оның негізгі қасиеттері 33
2.2 Жарты өсте анықталған Лоренц кеңістіктеріндегі Гильберт түрлендіруінің спектрі 34
2.3 Толық өсте анықталған Лоренц кеңістіктеріндегі Гильберт түрлендіруінің спектрі 43
2.4 Жарты өсте анықталған симметриялық кеңістіктегі Гильберт түрлендіруінің спектрі 48
3 ЖАЛПЫЛАНҒАН ЧЕЗАРО ОПЕРАТОРЛАРЫНЫҢ СПЕКТРІ
3.1 Жалпыланған Чезаро операторлары және көмекші нәтижелер 57
3.2 Ақырлы аралықта анықталған Лоренц кеңістігіндегі жалпыланған Чезаро операторының спектрі 77
3.3 Жарты өсте анықталған Лоренц кеңістіктеріндегі жалпыланған Чезаро операторының спектрі 84
3.4 Ақырлы аралықта анықталған симметриялық кеңістіктердегі жалпыланған Чезаро операторының спектрі 88
3.5 Жарты өсте анықталған симметриялық кеңістіктердегі жалпыланған Чезаро операторының спектрі 94

ҚОРЫТЫНДЫ 97
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ 99

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

Бұл диссертацияда төмендегі стандарттарға сілтемелер қолданылады:

ҚР МЖМБС 5.04.034-2011. Қазақстан Республикасының мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім беру. Докторантура. Негізгі ережелер;

МЕМСТ 7.1-2003. Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Жалпы талаптары мен құрастыру ережелері;

МЕМСТ 7.32-2017. Ғылыми-зерттеу жұмысы туралы есеп. Құрылымы және пішімдеу ережелері.

КІРІСПЕ

Қазіргі функционалдық талдау мен операторлар теориясының маңызды бағыттарының бірі — әртүрлі функциялар кеңістіктерінде анықталған интегралдық және сингулярлы интегралдық операторлардың спектрлік қасиеттерін зерттеу. Бұл мәселе тек таза теориялық қызығушылықпен ғана шектелмейді. Оператор спектрі оның кері операторларының бар болуын, резольвентасының құрылымын, эволюциялық теңдеулермен байланысын, асимптотикалық қасиеттерін және функционалдық қисап мүмкіндіктерін сипаттайтын негізгі ұғымдардың бірі болып табылады. Әсіресе сингулярлы интегралдық операторлар үшін спектрді зерттеу гармониялық талдау, интерполяция теориясы, жартытоптар теориясы және Банах функциялар кеңістіктерінің геометриясы арасындағы терең байланысты ашуға мүмкіндік береді [16, 17, 19, 72–76].

Соңғы жылдары классикалық L_p кеңістіктерінен анағұрлым жалпы кеңістіктерге, атап айтқанда симметриялық кеңістіктерге көшу үрдісі айқын байқалады. Мұндай кеңістіктер Лебег, Лоренц, Орлич және басқа да кең функциялық кластарды бір ортақ қасиетке біріктіреді. Сондықтан осы кеңістіктерде анықталған операторларды зерттеу тек жеке мысалдарды сипаттау емес, бір мезгілде кеңірек теориялық нәтижелер алуға жол ашады. Олардың негізгі қасиеттері, интерполяциялық сипаттамалары және Бойд индекстері [8, 10, 11, 25, 30, 34] жұмыстарында жан-жақты зерттелген. Бұл тұрғыдан алғанда, симметриялық кеңістіктердегі сингулярлы интегралдық операторлардың спектрін зерттеу қазіргі функционалдық талдаудың өзекті мәселелерінің бірі болып табылады.

Осы диссертацияда Гильберт түрлендіруі және жалпыланған Чезаро операторлары қарастырылады. Гильберт түрлендіруі сингулярлы интегралдық операторлардың негізгі мысалдарының бірі болса, жалпыланған Чезаро операторы Харди типті операторларының жалпылауы болып табылады. Екі оператордың да спектрлік қасиеттері олардың анықталу облысына, әсер ететін функциялар кеңістігіне және сол кеңістіктің геометриялық параметрлеріне тәуелді.

Берілген $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ өлшемді жиынында анықталған f локалды интегралданатын функциясы үшін Гильберт түрлендіруі

$$(H_\Omega f)(x) := \frac{1}{\pi i}\, p.v. \int_\Omega \frac{f(t)}{t-x}\, dt$$

формуласы арқылы анықталады. Мұндағы $p.v.$ - Кошидің бас мәні мағынасын білдіреді. Гильберт түрлендіруінің классикалық теориясы Марсель Рис, Титчмарш, Стейн, Кинг және Трикоми еңбектерінде кеңінен қарастырылған [23, 33, 36–38]. Бірөлшемді сингулярлы интегралдық операторлар теориясы Гохберг пен Крупник монографиясында жүйелі түрде берілген [101]. Гильберт түрлендіруінің салмақты

L_p-кеңістіктеріндегі шенелгендігі [21] жұмысында сипатталады. Кейін бұл бағыт [2, 24, 31, 51–53] жұмыстарында дамытылды.

Симметиялық кеңістіктердегі Гильберт түрлендіруінің қасиеттері Бойд, О'Нил және Вайсс, Фехер, Гашпар, Йонен және Райан еңбектерінде қарастырылған [9, 46, 54–56]. Бойд нәтижесі тривиалды емес Бойд индекстері жағдайында Гильберт түрлендіруінің симметриялық кеңістіктерде шенелгендігін көрсетеді [9]. Толық және жарты өстердегі L_p-кеңістіктер үшін спектрлік сипаттамалар Йоргенс жұмысында алынған [22], ал $L_p(\Omega)$ -кеңістігіндегі сингулярлы интегралдық операторлардың спектрі Уйдом еңбегінде зерттелген [39].

Ақырлы аралықта анықталған Гильберт түрлендіруінің кері операторы, кеңейтілуі және спектрлік қасиеттері Курбера, Окада және Риккер жұмыстарында зерттелген [14, 15, 42–45]. Толық өсте анықталған Орлич кеңістіктері үшін Гильберт түрлендіруінің спектрі [3] жұмыста, толық және жарты өстерде анықталған Лоренц кеңістіктеріндегі спектрі [4] жұмыста сипатталған. Симметриялық кеңістіктер үшін Гильберт түрлендірулерінің оптимал анықталу және мәндер кеңістіктері [47,48,49, 50] жұмыстарында зерттелген.

Айталық, $\beta > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}_+$ — өлшемді жиын және f — Ω -да локалды интегралданатын функция болсын. Онда

$$\left(C_\beta f\right)(t) = \frac{\beta}{t^\beta}\int_0^t f\,(s)s^{\beta-1}\,ds,\ t \in \Omega$$

өрнегі арқылы анықталатын оператор жалпыланған Чезаро операторы деп аталады. Жалпыланған Чезаро операторының $L_p(\mathbb{R}_+)$ кеңістіктерінің ішкі кеңістіктері болып табылатын Соболев кеңістіктеріндегі шенелгендігі мен спектрлік қасиеттері [29] жұмысында зерттелген. Аталған оператордың L_p кеңістіктеріндегі шенелгендігі Харди, Литлвуд және Полиа еңбегіндегі жалпыланған Харди теңсіздігінен шығады [20]. Бұл теңсіздік C_β операторының шенелгендігін ғана емес, оның нормасын бағалауға да мүмкіндік береді. Жалпыланған Чезаро операторларының дискретті аналогтары [1]-де зерттелген.

Егер жалпыланған Чезаро операторы үшін $\beta = 1$ болғанда

$$(C_1 f)(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f\,(s)\,ds$$

түріндегі классикалық Чезаро–Харди операторымен беттеседі. Сондықтан C_β операторын классикалық Чезаро операторының табиғи жалпылауы ретінде қарастыруға болады. Ал классикалық Чезаро–Харди операторының және онымен байланысты операторлардың әртүрлі Банах функциялар кеңістіктеріндегі

шенелгендігі, компакттылығы, спектрі және басқа қасиеттері [5–7, 12, 13, 27, 28, 41] жұмыстарында қарастырылған.

Диссертацияда қарастырылатын C_β интегралдық операторының Лоренц кеңістіктеріндегі спектрлік қасиеттері [40] жұмыста алынған. [29] және [40] жұмыстарда жалпыланған Чезаро операторы C_0 -топтар мен C_0 -жартытоптар арқылы өрнектеліп, оның спектрін зерттеуде сәйкес генераторлардың спектрі пайдаланылған. Бұл жұмыстар диссертациядағы жалпыланған Чезаро операторларын зерттеудің тікелей алғышарттары болып табылады.

Жалпы Чезаро операторының әртүрлі функциялық кеңістіктердегі спектрлік және динамикалық қасиеттері Альбанезе, Бонет және Риккер еңбектерінде зерттелген [58, 59]. Чезаро операторы мен композициялық жартытоптар арасындағы байланыс Сискакис жұмысында қарастырылған [60]. Харди операторының шенелгендігі, оптимал анықталу және мәндер кеңістіктері [62-71] жұмыстарда сипатталған. Сондай-ақ, симметриялық квази-Банах кеңістіктеріндегі шенелгендігі Бойд индекстері арқылы қажетті және жеткілікті шарттар түрінде [102] жұмысында сипатталған.

Зерттеу тақырыбының өзектілігі – Гильберт түрлендіруі мен жалпыланған Чезаро операторларының спектрін симметриялық және Лоренц кеңістіктеріне қатысты анықтау. Классикалық L_p -кеңістіктерінде белгілі нәтижелерді жалпы симметриялық кеңістіктерге көшіру әрқашан тікелей жүзеге аспайды. Мұнда Бойд индекстері, сепарабельділік, кеңістіктің фундаментал функциясы және анықталу облысының геометриясы маңызды. Сондықтан операторларды толық өс, жарты өс және ақырлы аралық жағдайлары үшін симметриялық және Лоренц кеңістіктерінде жеке зерттеу қажет.

Диссертациялық жұмыстың мақсаты — симметриялық Банах функциялар кеңістіктерінде және $L_{p,q}$ Лоренц кеңістіктерінде анықталған Гильберт түрлендіруі мен жалпыланған Чезаро операторларының спектрін және резольвенталық қасиеттерін сипаттау, олардың Бойд индекстерімен және анықталу облысымен байланысын анықтау. Осы мақсатқа жету үшін келесі міндеттер қойылады:

1. Симметриялық функциялар кеңістіктері, Бойд индекстері, спектрлік теория, күшті үзіліссіз жартытоптар мен топтар, секторлық операторлар және функционалдық қисап бойынша қажетті анықтамаларды жүйелеу;
2. Жарты өсте анықталған симметриялық Банах функциялар кеңістіктерінде Гильберт түрлендіруінің шенелгендігін, резольвентасын және спектрін сипаттау;
3. $L_{p,q}(\mathbb{R})$ және $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ Лоренц кеңістіктеріндегі Гильберт түрлендіруінің спектрін, нүктелік спектрін және резольвентасын анықтау;
4. $(0,1)$ аралығында және $\mathbb{R}_+$ жарты өсінде анықталған жалпыланған Чезаро операторларын сәйкес C_0-жартытоптар мен C_0-топтар арқылы өрнектеу;
5. Осы жартытоптар мен топтар генераторларының спектрін сипаттау;

6. Симметриялық және Лоренц кеңістіктеріндегі жалпыланған Чезаро операторларының спектрін функционалдық қисап және спектрлік бейнелеу әдістері арқылы табу.

Зерттеу нысаны — симметриялық Банах функциялар кеңістіктерінде және $L_{p,q}$ Лоренц кеңістіктерінде анықталған Гильберт түрлендіруі, жалпыланған Чезаро операторлары, олармен байланысты C_0 -жартытоптар мен C_0 -топтар, олардың генераторлары және резольвенталары.

Зерттеу әдістері. Жұмыста Банах алгебралары мен сызықты операторлардың спектрлік теориясы, симметриялық функциялар кеңістіктері теориясы, Бойд индекстері, күшті үзіліссіз жартытоптар мен топтар теориясы, секторлық операторлар үшін функционалдық қисап, Фурье және Лаплас түрлендірулері, Бета және Гамма функцияларының қасиеттері қолданылады.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы төмендегідей нәтижелермен сипатталады:

1. Жарты өсте анықталған симметриялық Банах функциялар кеңістіктерінде Гильберт түрлендіруінің резольвентасы сипатталып, оның спектрі Бойд индекстері арқылы өрнектелді;
2. толық және жарты өстерде анықталған Лоренц кеңістіктеріндегі Гильберт түрлендіруінің спектрі, нүктелік спектрі және резольвентасының айқын формулалары алынды;
3. Тривиалды емес Бойд индекстері бар симметриялық кеңістіктерде жалпыланған Чезаро операторларының шенелгендігі дәлелденіп, олардың $(0,1)$ және $\mathbb{R}_+$ жағдайларындағы спектрі сипатталды;
4. Лоренц кеңістіктеріндегі жалпыланған Чезаро операторлары үшін C_0-топтар мен C_0-жартытоптар анықталып, олардың генераторларының спектрі арқылы жалпыланған Чезаро операторлар спектрінің сипаттамасы алынды;
5. Жалпыланған Чезаро операторларының спектрін зерттеуде C_0-жартытоптар мен функционалдық қисаптың тиімділігі көрсетілді.

Жұмыстың теориялық және практикалық маңыздылығы. Диссертацияда алынған нәтижелер симметриялық Банах функциялар кеңістіктері мен Лоренц кеңістіктеріндегі сингулярлы интегралдық және интегралдық операторлардың спектрлік теориясын толықтырады. Атап айтқанда, Гильберт түрлендіруі мен жалпыланған Чезаро операторларының спектрін Бойд индекстері, C_0-жартытоптар мен C_0 -топтар, олардың генераторлары және функционалдық қисап арқылы сипаттау әдістері одан әрі зерттеулерде қолданылуы мүмкін.

Жұмыста пайдаланылған әдістер Харди типті операторлардың, сондай-ақ симметриялық кеңістіктерде анықталған интегралдық және сингулярлы интегралдық операторлардың спектрлік қасиеттерін зерттеуге жарамды. Алынған нәтижелер функционалдық талдау, гармониялық талдау, операторлар теориясы және спектрлік теория бойынша пайдаланылуы мүмкін.

Диссертациялық жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы. Диссертациялық жұмыс “Облыстың ауытқуы жағдайында

жалпыланған бигармоникалық Стеклов есептерінің спектрлік тұрақтылығы” (AP26194963, 2025-2027 жж.) жобасы аясында қаржыландырып орындалды және докторант Озбебай Б.О. жоба орындаушысы ретінде қатысып келеді.

Ғылыми тұжырымдардың, қорытындылар мен нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі. Диссертацияда алынған нәтижелердің дұрыстығы қолданылған әдістердің қатаң математикалық негізделуімен, дәлелдемелердің толықтығымен және классикалық спектрлік теория, симметриялық кеңістіктер теориясы, операторлық жартытоптар теориясы мен функционалдық қисаптың белгілі нәтижелеріне сүйенуімен қамтамасыз етіледі. Негізгі нәтижелер рецензияланатын ғылыми журналдарда жарияланған [3, 4, 40].

Апробация. Диссертациялық жұмыстың жекелеген нәтижелері Ғалымдар күніне арналған дәстүрлі халықаралық математикалық сәуір конференцияларында (Алматы, 2023–2025), EMJ-2025 халықаралық конференциясында (Астана, 2025), 15th ISAAC Congress халықаралық конгресінде (Астана, 21–25 шілде 2025), Centre de Recerca Matemàtica орталығында өткен «Modern Trends in Fourier Analysis» халықаралық конференциясында (Барселона, 2–6 маусым 2025), сондай-ақ Математика және математикалық модельдеу институты мен әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің ғылыми семинарларында баяндалып, талқыланды.

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша үш ғылыми мақала жарияланды:

1. M. E. Akhymbek, R. A. Tastankul, B. O. Ozbekbay. Spectrum of the Hilbert Transform on Orlicz Spaces over R. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 121 (2024), no. 1, 3–11. DOI: 10.26577/JMMCS202412111. Квартиль:Q2, Процентиль: 37, Индекс цит.: 1.0, SJR: 0.275.
2. M. Akhymbek, K. Tulenov, B. Ozbekbay. Spectrum of the Hilbert Transform on Lorentz Spaces Lp,q. Complex Variables and Elliptic Equations, 70 (2025), no. 9, 1555–1566. DOI: 10.1080/17476933.2024.2413126. Квартиль: Q3, Процентиль: 56, Индекс цит.: 1.9, SJR: 0.493.
3. K. Tulenov, B. Ozbekbay. Spectrum of the Generalized Cesàro Operator on the Lorentz Spaces. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 125 (2025), no. 1, 66–80. DOI: 10.26577/JMMCS2025125106. Квартиль: Q2, Процентиль: 37, Индекс цит.: 1.0, SJR: 0.275.

Диссертацияның құрылымы. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, үш тараудан, қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады.

Диссертация мазмұны. Кіріспеде зерттеу тақырыбының өзектілігі, зерттелу деңгейі, мақсаты мен міндеттері, зерттеу нысаны, қолданылған әдістер, ғылыми жаңалығы, теориялық және практикалық маңыздылығы, нәтижелердің сенімділігі, апробациясы және жарияланымдар туралы мәліметтер берілген.

Бірінші тарауда жұмыстың кейінгі бөлімдерінде қолданылатын негізгі анықтамалар мен көмекші нәтижелер жүйеленеді. Атап айтқанда, симметриялық функциялар кеңістіктері, Лоренц және Орлич кеңістіктері, Бойд индекстері, шенелген сызықты операторлардың спектрі, күшті үзіліссіз жартытоптар мен

топтар, секторлық операторлар және функционалдық қисаптың негізгі ұғымдары беріледі.

Екінші тарау Гильберт түрлендіруінің спектрлік қасиеттеріне арналған. Мұнда жарты өсте анықталған симметриялық Банах функциялар кеңістіктерінде Гильберт түрлендіруінің резольвентасы мен спектрі Бойд индекстері арқылы сипатталады. Сонымен қатар, толық және жарты өстерде анықталған Лоренц кеңістіктеріндегі Гильберт түрлендіруінің спектрі, нүктелік спектрі және резольвентасының формулалары зерттеледі.

Үшінші тарауда жалпыланған Чезаро операторларының спектрі қарастырылады. Алдымен $(0,1)$ аралығында және $\mathbb{R}_+$ жарты өсінде анықталған жалпыланған Чезаро операторлары сәйкес C_0-жартытоптар мен C_0-топтар арқылы өрнектеледі. Бұдан кейін операторлардың симметриялық кеңістіктердегі шенелгендігі зерттеледі. C_0-жартытоптар мен C_0-топтардың генераторларының спектрі сипатталып, осы нәтижелердің негізінде симметриялық және Лоренц кеңістіктеріндегі жалпыланған Чезаро операторларының спектрі анықталады.

Алғыс. Диссертациялық жұмысты орындау барысында көрсеткен жан-жақты ғылыми жетекшілігі, құнды кеңестері және тұрақты қолдауы үшін ғылыми жетекшім, PhD, профессор Туленов Канат Серікұлына шынайы алғысымды білдіремін. Сонымен қатар, Математика және математикалық модельдеу институтының ұжымына ғылыми орта қалыптастырғаны және зерттеу жұмысын жүргізуге қолайлы жағдай жасағаны үшін алғыс айтамын. Зерттеу барысында қолдау көрсеткен әріптестеріме, достарыма және отбасыма шын жүректен ризашылығымды білдіремін.

1 Негізгі анықтамалар мен белгілеулер

1.1 Симметриялық функциялар кеңістігі

Айталық, $\alpha \in (0,\infty)$ болсын $\Omega = (0,\alpha)$ және $\mathcal{A}$ — Ω -дағы Лебег өлшемді жиындардың σ -алгебрасы. (Ω, m) арқылы біз $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ өлшем кеңістігін, мұндағы m — Лебег өлшемі, белгілейміз. $L_0(\Omega) = L_0(\Omega, m)$ — Ω -дағы барлық (эквиваленттік кластардағы) өлшемді комплекс мәнді функциялар кеңістігі.

Онда $S(\Omega) = S(\Omega, m)$ деп $L_0(\Omega)$ кеңістігінің

$$S(\Omega) = \{ f \in L_0(\Omega) : m(\{| f | > s\}) < \infty \text{ кейбір } s > 0\}$$

түрінде анықталатын ішкі кеңістігін белгілейміз. Егер $m(\Omega) < \infty$ болса, онда $S(\Omega) = L_0(\Omega)$ болатыны айқын.

Берілген $f \in S(\Omega)$ функциясының *үлестірім* функциясы $\mu_f : [0,\infty) \to [0,\infty]$ деп

$$\mu_f(u) = m\{t \in \Omega : | f(t) | > u\}, \qquad u \geq 0$$

түрінде анықталатын функцияны айтамыз.

Қандай да бір $f \in S(\Omega)$ және $g \in S(\Omega)$ функциялары

$$\mu_f(u) = \mu_g(u), \qquad u \geq 0$$

шартын қанағаттандырса, онда олар *теңөлшемді* функциялар деп аталады.

Берілген $f \in S(\Omega)$ функциясының *өспейтін алмастыру* функциясы $f^* : [0,\infty) \to [0,\infty]$ деп

$$f^*(t) = \inf\{u \geq 0 : \mu_f(u) \leq t\}, \qquad t \geq 0$$

түрінде анықталатын функцияны айтамыз. Жалпы $\inf \varnothing = \infty$ деп ұйғарайық. Сонымен қатар, f^* функциясы Ω жиынында $|f|$ функциясымен теңөлшемді, кемімелі және оң жақтан үздіксіз функция [8]. Берілген $f \in S(\Omega)$ функциясының f^{**} функциясы келесі түрде анықталады

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)\, ds.$$

Айталық, E — $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ σ -ақырлы өлшем кеңістігіндегі $\|\cdot\|_E$ квази-нормасымен жабдықталған өлшемді функциялардың Банах кеңістігі болсын, мұндағы $\|\cdot\|_E : E \to [0,\infty)$ функционалы

1. $\| f \|_E = 0$ сонда тек сонда ғана $f = 0$;

2. $\| \lambda f \|_E = |\lambda| \| f \|_E$, $\forall f \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$;

3. $\| f + g \|_E \le K_E (\| f \|_E + \| g \|_E)$, $f, g \in E$, мұндағы $K_E \ge 1$ тек E -ге тәуелді тұрақты;

шарттарын қанағаттандырсын. Онда $(E, \|\cdot\|_E)$ жұбын квази-нормаланған Банах кеңістігі деп атаймыз. Егер $K_E = 1$ болса, онда E - Банах кеңістігі болады.

1.1.1 - анықтама Берілген $(E(\Omega), \|\cdot\|_E)$ (квази-)Банах кеңістігі *симметриялық (квази-)Банах кеңістігі* деп аталады, егер

1. $E(\Omega) \subset S(\Omega)$;

2. егер $f \in E$, $g \in S(\Omega)$ және $|g| \le |f|$ болса, онда $g \in E$ және $\| g \|_E \le \| f \|_E$;

3. егер $f \in E$, $g \in S(\Omega)$ және $\mu_g = \mu_f$ болса, онда $g \in E$ және $\| g \|_E = \| f \|_E$;

шарттары орындалса. Симметрия ұғымы E кеңістігінің теңөлшемді функцияларға қатысты инварианттылығын білдіреді.

Жалпы симметриялық Банах кеңістіктері туралы мәліметтерді [8, 25] әдебиеттерінен қарауға болады.

1.1.2 - анықтама Берілген E симметриялық (квази-)Банах кеңістігінде

$$\varphi_E(t) = \| \chi_{(0,t]} \|_E, \quad t \ge 0$$

түрінде анықталған φ_E функциясы *іргелі* функция деп аталады. Мұнда χ_A функциясы — $A \subset \Omega$ жиынының сипаттаушы функциясы.

Сонымен қатар, барлық $t \ge 0$ және Ω жиынының өлшемді A жиыны үшін $m(A) = t$ болсын, онда $\varphi_E(t) = \| \chi_A \|_E$ болады.

Берілген $f \in S(\Omega)$ функциясы $g \in S(\Omega)$ функциясы арқылы Харди–Литтлвуд–Поли мағынасында субмажорланады дейміз ($f \prec\prec g$ белгілейміз), егер

$$\int_0^t f^*(s)ds \le \int_0^t g^*(s)ds, \quad t \ge 0$$

теңсіздігі орындалса.

Енді симметриялық кеңістіктегі созу операторы мен Бойд индекстері ұғымдарын анықтап, олардың негізгі қасиеттерін келтіреміз.

1.1.3 а н ы қ т а м а Әрбір $0 < s < \infty$ саны үшін $S(\Omega)$ кеңістігінде, егер $\Omega = (0,\infty)$ болса

$$D_s f(t) = f\left(\frac{t}{s}\right), \qquad 0 < t < \infty,$$

түрінде, ал $\Omega = (0,1)$ болғанда

$$D_s f(t) = \begin{cases} f\left(\frac{t}{s}\right), & 0 < t < \min(1,s), \\ 0, & \min(1,s) < t < 1 \end{cases}$$

түрінде анықталатын бейнелеуді *созу* операторы деп атаймыз.

D_s операторының $E(\Omega)$ кеңістігінен өз-өзіне әсер еткендегі оператор нормасын $h_E(s)$ арқылы белгілейміз, яғни

$$h_E(s) := \| D_s \|_{E(\Omega)}.$$

1.1.4 т ұ ж ы р ы м [8] *Созу* операторы кез келген симметриялық кеңістікте шенелген.

1.1.5 а н ы қ т а м а [8] Берілген $E(\Omega)$ симметриялық кеңістігінің *төменгі* және *жоғарғы Бойд индекстері* сәйкесінше

$$\alpha_E = \liminf_{0<s<1} \frac{\log \| D_s \|_{E\to E}}{\log s} = \lim_{s\to 0^+} \frac{\log \| D_s \|_{E\to E}}{\log s},$$

және

$$\beta_E = \limsup_{s>1} \frac{\log \| D_s \|_{E\to E}}{\log s} = \lim_{s\to\infty} \frac{\log \| D_s \|_{E\to E}}{\log s}$$

формулалары арқылы анықталады.
Кез-келген симметриялық кеңістіктердің төменгі және жоғарғы Бойд индекстері үшін

$$0 \le \alpha_E \le \beta_E \le 1$$

қатынастары орындалады, [8, 25]. Егер

$$0 < \alpha_E \le \beta_E < 1$$

болса, онда Бойд индекстері *тривиалды емес* деп айтылады.

Симметриялық кеңістіктер үшін бірнеше мысалдар келтіреміз. Алдымен, кең қолданылатын симметриялық функциялар кеңістіктерінің мысалы ретінде L_p Лебег кеңістіктерін айтамыз. Кез-келген $1 \le p < \infty$ үшін $L_p(\Omega)$ кеңістігі Ω жиынында анықталған және $p \in (1, \infty)$ үшін

$$\| f \|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty,$$

ал, $p = \infty$ үшін

$$\| f \|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{t\in\Omega} | f(t) | < \infty$$

шартын қанағаттандыратын барлық өлшемді функциялар кеңістігі. Кез-келген $1 \le p < \infty$ үшін $L_p(\Omega)$ кеңістігінің Бойд индекстері $\alpha_{L_p(\Omega)} = \beta_{L_p(\Omega)} = \frac{1}{p}$ болады.
Лебег кеңістіктерінен өзге де маңызды мысалдар ретінде $L_1 \cap L_\infty$ және $L_1 + L_\infty$ кеңістіктерін келтіруге болады. Атап айтқанда, $(L_1 \cap L_\infty)(\Omega) = L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ кеңістігі Ω жиынындағы барлық шенелген және интегралданатын функциялардан тұрады және оның нормасы

$$\| f \|_{(L_1\cap L_\infty)(\Omega)} := \max\left\{ \| f \|_{L_1(\Omega)}, \| f \|_{L_\infty(\Omega)} \right\}, \qquad f \in (L_1 \cap L_\infty)(\Omega),$$

түрінде анықталады. Ал $(L_1 + L_\infty)(\Omega) := L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega)$ кеңістігі

$$(L_1 + L_\infty)(\Omega) = \{ f \in L_0(\Omega) : f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in L_1(\Omega),\ f_2 \in L_\infty(\Omega) \}$$

түрінде анықталады және оның нормасы

$$\| f \|_{(L_1+L_\infty)(\Omega)} = \inf \{ \| f_1 \|_{L_1(\Omega)} + \| f_2 \|_{L_\infty(\Omega)} : f = f_1 + f_2,\ f_1 \in L_1(\Omega),\ f_2 \in L_\infty(\Omega) \}$$

түрінде беріледі. Қосымша мәліметтер үшін [8, I тарау], [25, II тарау] әдебиеттерін қараңыз. Бұл кеңістіктер симметриялық Банах кеңістіктерінің ең кішісі және ең үлкенінің мысалдары болып табылады. Сондай-ақ, Лебег өлшеміне қатысты Ω жиынындағы кез-келген E симметриялық Банах функциялар кеңістіктері үшін

$$(L_1 \cap L_\infty)(\Omega) \subset E(\Omega) \subset (L_1 + L_\infty)(\Omega)$$

түрінде үзіліссіз енгізілулері орындалады ([25, II.4.1 теорема, 91 бет] қараңыз).

Енді симметриялық кеңістіктердің мысалы ретінде Лоренц және Орлич кеңістіктерінің анықтамаларын береміз.

1.1.6-анықтама Айталық $1 \le p \le \infty, 1 \le q \le \infty$ болсын. Онда $L_{p,q}(\Omega)$ *Лоренц кеңістігі* деп $\| f \|_{L_{p,q}(\Omega)} < \infty$ орындалатын Ω жиынында анықталған барлық өлшемді f функцияларының жиынын айтамыз, мұндағы

$$\| f \|_{L_{p,q}} = \begin{cases} \left(\int_0^{m(\Omega)} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \le p < \infty, 1 \le q < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & 1 \le p \le \infty,\ q = \infty \end{cases}$$

түрінде анықталады. Егер q саны ақырлы болып, $p = \infty$ болса, онда $L_{\infty,q}(\Omega)$ кеңістігі тривиалды болады. Сондай-ақ, $L_{p,q}(\Omega)$ Лоренц кеңістігі $L_p(\Omega)$ Лебег кеңістігінің жалпылауы болып табылады. Егер p және q сандары өзара тең болса, онда $L_{p,q}(\Omega)$ Лоренц кеңістігі дәл $L_p(\Omega)$ Лебег кеңістігімен беттеседі және олардың нормалары

$$\| f \|_{L_{p,p}} = \| f \|_{L_p}, \qquad (f \in L_p(\Omega))$$

теңдігін қанағаттандырады.

1.1.7 - т ұ ж ы р ы м [8, 217 бет] Айталық, $1 \le p \le \infty$ және $1 \le q \le r \le \infty$ болсын. Онда барлық $f \in S(\Omega)$ үшін

$$\| f \|_{L_{p,r}} \le c \| f \|_{L_{p,q}}$$

түріндегі теңсіздік орындалады. Мұндағы c тұрақтысы p, q және r параметрлеріне ғана тәуелді. Сондай-ақ,

$$L_{p,q}(\Omega) \subset L_{p,r}(\Omega)$$

түріндегі енгізу орындалады.

Жоғарыда анықтаған $\| \cdot \|_{L_{p,q}}$ функционалы Лоренц кеңістігінде $1 \le q \le p < \infty$ немесе $p = q = \infty$ жағдайлары үшін норма болады. Қалған жағдайлары үшін бұл функционал Лоренц кеңістігінде квази-норма болады. Біз Лоренц кеңістігі үшін пара-пар норма анықтаймыз.

1.1.8 - а н ы қ т а м а [8, 219 бет] Айталық $1 < p \le \infty$ және $1 \le q \le \infty$ болсын. Онда кез-келген $f \in L_{p,q}(\Omega)$ үшін $\| \cdot \|^*_{L_{p,q}}$ нормасы

$$\| f \|^*_{L_{p,q}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{\nu(\Omega)} \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \le q < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t), & q = \infty \end{cases}$$

формуласы арқылы анықталады.

Сондай-ақ, [8, 219 бет] бойынша, егер $1 < p < \infty, 1 \le q \le \infty$ немесе $p = q = \infty$ болса, онда $\| \cdot \|^*_{L_{p,q}}$ функционалы $L_{p,q}(\Omega)$ кеңістігінде норма болып табылады. Яғни, $(L_{p,q}(\Omega), \| \cdot \|^*_{L_{p,q}})$ жұбы Банах кеңістігі. Сонымен қатар, Харди теңсіздігіне сәйкес $\| \cdot \|_{L_{p,q}}$ квази-нормасы мен $\| \cdot \|^*_{L_{p,q}}$ нормасы пара-пар. Яғни,

$$\| f \|_{L_{p,q}} \le \| f \|^*_{L_{p,q}} \le \frac{p}{p-1} \| f \|_{L_{p,q}}$$

теңсіздіктері орындалады. Егер $p=\infty$ олса, онда $\frac{p}{p-1}=1$ деп ұйғарамыз.

Берілген $\omega:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ өлшемді локалды шенелген функция *салмақ* деп аталады, егер ол барлық $t,s\in\mathbb{R}$ үшін $\omega(t)\geq 1$ және

$$\omega(t+s)\leq\omega(t)\omega(s)$$

шарттарын қанағаттандырса. Қандай да бір $\omega(\cdot)$ салмағы *квазианалитикалық емес* деп аталады, егер

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\ln\omega(t)}{1+t^2}dt<\infty$$

болса.

1.1.9 - анықтама [35, 2459 бет] Айталық, ω функциясы — $\mathbb{R}$ толық өсінде квазианалитикалық емес салмақ функциясы болсын. Онда $L^1_\omega(\mathbb{R})$ *Бёрлинг алгебрасы* деп

$$\| f \|_\omega=\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\,\omega(t)\,dt<\infty$$

шартын қанағаттандыратын барлық интегралданатын $f\in L_1(\mathbb{R})$ функциялар кеңістігін айтамыз.

Келесі кезекте симметриялық кеңістіктердің бір мысалы, Орлич кеңістігін анықтаймыз. Алдымен қажетті анықтамар келтіреміз.

1.1.10 - анықтама [26, 32] Айталық $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ бейнелеуі N-функция деп аталады, егер келесі шарттар орындалса:

- $\Phi(x)=0$ болады егер $x=0$ болса, ал барлық $x>0$ үшін $\Phi(x)>0$ болса,
- Φ функциясы дөңес, үзіліссіз және жұп функция болсын,
- $$\lim_{x\to 0}\frac{\Phi(x)}{x}=0,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\Phi(x)}{x}=+\infty.$$

1.1.11 - анықтама Берілген Φ - N-функциясы үшін егер қандай да бір $k>0$ тұрақтысы табылып,

$$\Phi(2x) \le k\Phi(x), \qquad \forall x > 0,$$

түріндегі теңсіздік орындалса, онда Φ - N -функциясы Δ_2 шартын қанағаттандырады дейміз.

Әрбір Φ N -функциясы үшін және $\mathbb{R}$ толық өсіндегі әрбір өлшемді f функциясы үшін

$$M^{\Phi}(f) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(|f|)dx$$

түрдегі функционалын анықтауға болады және осы функционал арқылы

$$\| f \|_{L_\Phi} := \inf \left\{ a > 0 : M^{\Phi}\left(\frac{f}{a}\right) \le 1 \right\}$$

түріндегі функционалды анықтаймыз.

1.1.12 - анықтама Айталық, Φ N -функциясы берілсін. Онда *Орлич кеңістігі* деп

$$L_\Phi = \{ f \in L : \| f \|_{L_\Phi} < \infty \}$$

түрінде анықталған және $\| f \|_{L_\Phi}$ нормасымен жабдықталған өлшемді функциялар кеңістігін айтамыз.

Орлич кеңістігі симметриялық кеңістіктердің бір мысалы болып табылады. Атап айтқанда, егер N -функция

$$\Phi(x) = \frac{x^p}{p}, \qquad p \in (1, \infty),$$

түрінде болса, онда L_p кеңістіктері Орлич кеңістіктерімен беттеседі. Орлич кеңістіктері L_Φ туралы толығырақ мәліметті [8] әдебиетінен қараңыз.

1.1.13 – лемма [26,32] Келесі тұжырымдар өзара пара-пар:

1. Φ N -функциясы Δ_2-шартын қанағаттандырады;

2. $L_\Phi(\mathbb{R})$ Орлич кеңістігі рефлексивті;

3. $L_\Phi(\mathbb{R})$ Орлич кеңістігі сепарабельді.

Симметриялық (квази-)Банах функциялар кеңістіктерінің жалпы теориясы мен анықтамаларын [8, 25] және [30] еңбектерінен табуға болады.

1.1.14 - тұжырым [18, 2.1 - лемма] Егер $X(\mathbb{R})$ кеңістігі сепарабельді Банах кеңістігі болса, онда $L_2(\mathbb{R}) \cap X(\mathbb{R})$ кеңістігі $X(\mathbb{R})$ кеңістігінде тығыз.

1.1.15 - тұжырым [34, 9.3.1 - теорема] Егер $1 < p < \infty$ және $1 \le q < \infty$ болса, онда $L_{p,q}(\Omega)$ Лоренц кеңістігі сепарабельді болады.

1.2 Сызықты шенелген операторлардың спектрлік теориясы

Бұл бөлімде сызықты шенелген операторлардың спектрін анықтап, оларға қатысты кейбір тұжырымдарды келтіреміз.

Берілген E және F (квази-)Банах кеңістіктері үшін E кеңістігінен F кеңістігіне бейнелейтін барлық сызықты шенелген операторлар кеңістігін $\mathcal{B}(E,F)$ арқылы белгілейміз. Егер $E = F$ болса, онда қысқаша $\mathcal{B}(E)$ деп жазамыз. Белгілі болғандай, егер E және F (квази-)Банах кеңістіктері болса, онда $\mathcal{B}(E,F)$ жиыны да оператор нормасымен жабдықталған (квази-)Банах кеңістігі болады. Осы белгілеу осы жұмыста тұрақты түрде қолданылады.

Спектрлік теорияда сызықтық шенелген операторлар кеңістігін Банах алгебрасы ретінде қарастыру өте ыңғайлы. Осыған байланысты алдымен Банах алгебрасы және алгебралық элемент ұғымдарын береміз.

1.2.1 - анықтама Қандай да бір $\mathcal{A}$ нормаланған кеңістігінде кез-келген екі $A, B \in \mathcal{A}$ элементтері үшін

a. $(AB)C = A(BC)$;

b. $(A+B)C = AC + BC$ және $A(B+C) = AB + AC$;

c. кез-келен $\alpha \in \mathbb{C}$ үшін $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

қасиеттері бар $AB \in \mathcal{A}$ көбейтіндісі анықталса, онда ол *нормаланған алгебра* деп аталады. Бұл көбейтінді

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\|$$

теңсіздікті қанағаттандырады, мұндағы $\|\bullet\|$ - $\mathcal{A}$ кеңістігіндегі норма. Егер бұған қоса $\mathcal{A}$ Банах кеңістігі болса, онда $\mathcal{A}$ *Банах алгебрасы* деп аталады. Егер $\mathcal{A}$ алгебрасында барлық $A \in \mathcal{A}$ үшін

$$AI = IA = A, \quad \|I\| = 1$$

шарттарын қанағаттандыратын I элементі бар болса, онда $\mathcal{A}$ алгебрасы сәйкесінше *бірлігі бар нормаланған алгебра* немесе *бірлігі бар Банах алгебрасы* деп аталады.

Оператор нормасының қасиеттері бойынша $\mathcal{B}(E)$ кеңістігі бірлігі бар Банах алгебрасы болады. Сондықтан, кейін қарастырылатын операторлардың спектрлік қасиеттерін зерттеу үшін Банах алгебралары теориясының жалпы нәтижелерін қолдануға болады.

1.2.2 - анықтама Айталық, $\mathcal{A}$ бірлігі бар Банах алгебрасы берілсін. Қандай да бір $a \in \mathcal{A}$ элементі *алгебралық* деп аталады, егер коэффициенттері комплекс сандардан тұратын нөлден өзге көпмүше

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \lambda^k, \qquad \alpha_m \neq 0,$$

табылып,

$$p(a) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k a^k = 0$$

теңдігі орындалса.

Алгебралық элемент үшін нөлге айналдыратын көпмүшелердің ішіндегі дәрежесі ең кіші болатын көпмүше ерекше рөл атқарады.

1.2.3 - анықтама Айталық, $a \in \mathcal{A}$ алгебралық элемент болсын. Онда $p(a) = 0$ шартын қанағаттандыратын ең үлкен дәреженің алдындағы коэффициент 1-ге тең, дәрежесі ең кіші көпмүше a элементінің минимал көпмүшесі деп аталады.

Минимал көпмүше алгебралық элементтерін спектрін нақты сипаттауға мүмкіндік береді. Атап айтқанда, минимал көпмүшенің нөлдері оператордың спектрімен тікелей байланысты болады. Осы себепті бұл ұғым Гильберт түрлендіруінің $\mathbb{R}$ өрісіндегі алгебралық табиғатын сипаттауда қолданылады.

Алдымен минимал көпмүшенің жалғыз болатынын атап өтейік. Шынында, егер екі минимал көпмүше болып, оларды $p(\bullet)$ және $q(\bullet)$ деп белгілесек, әрі екеуінің де дәрежесі n болса, онда

$$(p - q)(a) = p(a) - q(a) = 0.$$

Бірақ нәтижелік $p(\bullet)-q(\bullet)$ көпмүшесінің дәрежесі n-нен кіші, ал бұл p мен q көпмүшелерінің минималдылығына қайшы келеді. Сондықтан

$$p(\bullet)=q(\bullet)$$

болады. Сондай-ақ, $q(a)=0$ шартын қанағаттандыратын кез-келген $q(\bullet)$ көпмүшесі a элементінің минимал көпмүшесіне бөлінетіндігі белгілі. Басқаша айтқанда, егер $q(a)=0$ болатындай $q(\bullet)$ көпмүшесі бар болса, онда

$$q(\bullet)=p(\bullet)r(\bullet)$$

теңдігі орындалады, мұндағы $p(\bullet)$ көпмүшесі - a элементінің минимал көпмүшесі.

Енді шенелген сызықтық операторлардың спектрлік теориясынан негізгі анықтамаларды келтіреміз. Бұл ұғымдар жұмыстың барлық бөлімдерінде, әсіресе, резольвенталық операторларды және спектр бөліктерін сипаттауда пайдаланылады.

1.2.4 - а н ы қ т а м а Айталық, X Банах кеңістігі және $A\in\mathcal{B}(X)$ болсын. Онда A операторының *резольвенттік жиыны* деп $\lambda I-A$ операторының кері операторы бар және шенелген болатын барлық $\lambda\in\mathbb{C}$ сандар жиынын айтамыз. Бұл жиын

$$\rho(A)$$

арқылы белгіленеді. Әрбір $\lambda\in\rho(A)$ үшін

$$R(\lambda,A):=(\lambda I-A)^{-1}$$

операторы A операторының *резольвентасы* деп аталады.

1.2.5 - а н ы қ т а м а Берілген $A\in\mathcal{B}(X)$ операторының *спектрі* деп

$$\sigma(A):=\mathbb{C}\setminus\rho(A)$$

жиынын айтамыз, яғни $\lambda I-A$ операторының шенелген кері операторы болмайтын барлық $\lambda\in\mathbb{C}$ сандар жиыны A операторының спектрін құрайды.

Спектрді оның құрылымдық бөліктеріне жіктеу спектрлік талдауда өте маңызды. Әсіресе нүктелік, үзіліссіз және қалдық спектрлердің әрқайсысы оператордың инъективтілігі мен мәндер жиынының қасиеттері туралы әртүрлі ақпарат береді.

1.2.6 - анықтама Айталық, $A \in \mathcal{B}(X)$ болсын. Онда A операторының спектрі

$$\sigma_{pt}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ инъективті емес}\},$$

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ инъективті, } \overline{\mathrm{Im}(\lambda I - A)} = X, \mathrm{Im}(\lambda I - A) \neq X\},$$

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ инъективті, } \overline{\mathrm{Im}(\lambda I - A)} \neq X\}$$

түрінде бөлінеді және мұндағы $\sigma_{pt}(A)$, $\sigma_c(A)$ және $\sigma_r(A)$ жиындары сәйкесінше A операторының нүктелік, үзіліссіз және қалдық спектрлері деп аталады.

Бұл жиындар өзара қиылыспайды және

$$\sigma(A) = \sigma_{pt}(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

теңдігі орындалады. Сондықтан оператор спектрін зерттеу кезінде оның осы үш бөлігінің әрқайсысын бөлек сипаттау маңызды болып табылады. Кейінгі тарауларда біз кейбір жағдайларда спектрдің толық сипаттамасын ғана емес, оның нүктелік бөлігін де арнайы анықтаймыз.

1.2.7 – тұжырым [22] Айталық, X —Банах кеңістігі, ал $T \in B(X)$ — сызықты шенелген оператор болсын. Онда T операторының спектрі $\sigma(T)$ бос емес компакты жиын. Дәлірек айтқанда,

$$\sigma(T) \neq \emptyset$$

және

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}.$$

Сондықтан $\sigma(T)$ тұйық және шенелген жиын болады.

Енді зерттеуімізде пайдалы болатын Банах алгебралары теориясынан көмекші бір нәтижені келтіреміз.

1.2.8 - тұжырым [22, 4.10 - жаттығу] Айталық, $\mathcal{A}$ – Банах алгебрасы және $A \in \mathcal{A}$ – алгебралық элемент болсын. Егер $p(\cdot)$ көпмүшесі – A элементінің минимал көпмүшесі болса, онда

$$\sigma(A) = p_0 := \{\lambda \in \mathbb{C} : p(\lambda) = 0\}$$

болады. Сонымен қатар, $\lambda \in \rho(A) = \mathbb{C} \setminus p_0$ үшін резольвента

$$R(\lambda, A) = \frac{1}{p(\lambda)} \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i B_i, \qquad (1.2.1)$$

түрінде жазылады, мұндағы

$$B_i = \sum_{k=i+1}^{m} \alpha_k A^{k-i-1}.$$

Дәлелдеуі: Алдымен $p(A) = 0$ болатын көпмүшелер үшін (1.2.1) формуласын тексерейік. Айталық,

$$R(\lambda, A) = \frac{1}{p(\lambda)} \left(B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \cdots + \lambda^{m-1} B_{m-1} \right),$$

болсын, мұндағы

$$B_0 = \alpha_1 I + \alpha_2 A + \cdots + \alpha_m A^{m-1},$$

$$B_1 = \alpha_2 I + \alpha_3 A + \cdots + \alpha_m A^{m-2},$$

$$B_2 = \alpha_3 I + \alpha_4 A + \cdots + \alpha_m A^{m-3}$$

$$\vdots$$

$$B_{m-2} = \alpha_{m-1} I + \alpha_m A,$$

$$B_{m-1} = \alpha_m I .$$

Онда есептеуден келесі қатынасты аламыз

$$p(\lambda) R(\lambda, A) = (\alpha_1 I + \alpha_2 A + \cdots + \alpha_m A^{m-1})$$

$$+ \lambda (\alpha_2 I + \alpha_3 A + \cdots + \alpha_m A^{m-2})$$

$$+ \lambda^2 (\alpha_3 I + \alpha_4 A + \cdots + \alpha_m A^{m-3})$$

$$+\cdots+\lambda^{m-2}(\alpha_{m-1}I+\alpha_m A)+\lambda^{m-1}\alpha_m I.$$

Сондықтан келесі теңдік орынды

$$p(\lambda)R(\lambda,A)=\alpha_1 I+\alpha_2(\lambda I+A)+\alpha_3(\lambda^2 I+\lambda A+A^2)$$

$$+\alpha_4(\lambda^3 I+\lambda^2 A+\lambda A^2+A^3)+\cdots$$

$$+\alpha_{m-1}(\lambda^{m-2}I+\lambda^{m-3}A+\cdots+\lambda A^{m-3}+A^{m-2})$$

$$+\alpha_m(\lambda^{m-1}I+\lambda^{m-2}A+\cdots+\lambda A^{m-2}+A^{m-1})$$

$$=\alpha_1(\lambda I-A)(\lambda I-A)^{-1}+\alpha_2\left((\lambda I)^2-A^2\right)(\lambda I-A)^{-1}+\cdots$$

$$+\alpha_{m-1}\left((\lambda I)^{m-1}-A^{m-1}\right)(\lambda I-A)^{-1}+\alpha_m\left((\lambda I)^m-A^m\right)(\lambda I-A)^{-1}$$

$$=(\lambda I-A)^{-1}\left(\alpha_1(\lambda I-A)+\alpha_2\left((\lambda I)^2-A^2\right)+\cdots+\alpha_{m-1}\left((\lambda I)^{m-1}-A^{m-1}\right)+\alpha_m\left((\lambda I)^m-A^m\right)\right)$$

$$=(\lambda I-A)^{-1}(p(\lambda)-p(A))=p(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}.$$

Демек $p(\lambda)\neq 0$ болғанда

$$(\lambda I-A)R(\lambda,A)=R(\lambda,A)(\lambda I-A)=I,$$

теңдігі орындаады, яғни, $R(\lambda,A)=(\lambda I-A)^{-1}$.

Егер $p(\lambda)\neq 0$ болса, $\lambda\in\rho(A)$ екенін көреміз, сондықтан

$$\sigma(A)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}:p(\lambda)=0\}=p_0.$$

Енді $p_0\subseteq\sigma(A)$ екенін дәлелдейік. Кері жорып, $\lambda_0\in p_0$ және $\lambda_0\in\rho(A)$ болсын деп ұйғарайық. $\lambda_0\in p_0$ болғандықтан, $p(\lambda_0)=0$. Сондықтан қандай да бір q көпмүшесі үшін

$$p(z)=(z-\lambda_0)q(z),\ \deg q<\deg p,$$

теңдігі орындалады. Ал $p(A)=0$ болғандықтан,

$$0 = p(A) = (A - \lambda_0 I)q(A)$$

теңдігін аламыз. Бірақ $\lambda_0 \in \rho(A)$, демек $A - \lambda_0 I$ операторы керіленеді. Соңғы теңдікті $(A - \lambda_0 I)^{-1}$операторына көбейтіп,

$$q(A) = 0$$

аламыз. Бұл p көпмүшесінің минималдығына қайшы, өйткені $q \neq 0$ және $\deg q < \deg p$. Демек, $\lambda_0 \notin \rho(A)$ болады, яғни $\lambda_0 \in \sigma(A)$ спектрда жатыр. Сондықтан

$$p_0 \subseteq \sigma(A)$$

және

$$\sigma(A) = p_0$$

теңдігі шығады. Тұжырым толық дәлелденді.

1.3 Күшті үзіліссіз жартытоптар және топтар

Күшті үзіліссіз бір параметрлі операторлық жартытоптар мен топтар функционалдық талдаудың, спектрлік теорияның маңызды құралдарының бірі болып табылады. Бұл теорияның классикалық негіздері Хилле және Филлипс еңбегінде қаланған [72]. Кейін күшті үзіліссіз жартытоптардың генераторлары, резольвенталары және спектрлік қасиеттері Пази [74], Энгель және Нагель [17, 75], сондай-ақ Арендт, Батти, Хибер және Нойбрандер [76] еңбектерінде жүйелі түрде дамытылды. Атап айтқанда, генератордың резольвентасын Лаплас түрлендіруі арқылы жартытоппен байланыстыру жартытоптар теориясының негізгі құралдарының бірі болып табылады.

Күшті үзіліссіз жартытоптың асимптотикалық және спектрлік қасиеттері оның генераторының спектрімен тығыз байланысты. Осы тұрғыдан генератордың спектрлік шекарасы, жартытоптың өсу шекарасы және олардың арасындағы қатынастар маңызды рөл атқарады. Жартытоптар мен олардың генераторлары үшін спектрлік қасиеттердің классикалық зерттеулеріне Филлипс [73], Герхарт [77] және [79] жұмыстары жатады. Спектр мен тұрақтылық арасындағы байланыстар Арендт және Батти [80], Любич және Фонг [81], Фонг [82], сондай-ақ кейінгі жұмыстарда [83–85] зерттелген.

1.3.1 – анықтама X Банах кеңістігі берілсін. Онда $\mathcal{B}(X)$ кеңістігіндегі $T = \{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ операторлар жиыны C_0-жартытоп (немесе күшті үзіліссіз жартытоп) деп аталады, егер келесі қасиеттер орындалса:

i. $T(0)=I$, мұндағы I — $\mathcal{B}(X)$ кеңістігіндегі бірлік оператор;

ii. барлық $t,s\in\mathbb{R}_+$ үшін $T(t+s)=T(t)T(s)$;

iii. барлық $f\in X$ үшін $\lim\limits_{t\to 0}T(t)f=f$.

Егер $T=\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ болып, жоғарыдағы қасиеттер $\mathbb{R}$ толық өсінде орындалса, онда T операторлар жиыны C_0-топ (немесе күшті үзіліссіз топ) деп аталады.

1.3.2 - анықтама Берілген $\mathcal{B}(X)$ Банах кеңістігіндегі $T=\{T(t)\}_{t\geq 0}$ күшті үзіліссіз жартытоптың генераторы

$$A: D(A)\subseteq X\to X$$

деп, әрбір $x\in D(A)$ үшін

$$Ax:=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(T(h)x-x\big) \qquad (1.3.1)$$

формуласы арқылы анықталатын операторды айтамыз.

Мұндағы генератордың анықталу облысы

$$D(A)=\left\{x\in X:\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(T(h)x-x\big)\ \text{шегі бар}\right\} \qquad (1.3.2)$$

түрінде беріледі.

1.3.3 - лемма [17] Берілген $T=\{T(t)\}_{t\geq 0}$ күшті үзіліссіз жартытобының A генераторы

i. $$A: D(A)\subseteq X\to X$$

сызықты;

ii. Егер $x\in D(A)$ болса, онда барлық $t\geq 0$ үшін $T(t)x\in D(A)$ және

$$\frac{d}{dt}T(t)x=T(t)Ax=AT(t)x;$$

iii. Әрбір $t\geq 0$ және $x\in X$ үшін

$$\int_0^t T(s)x\,ds \in D(A);$$

iv. Әрбір $t \geq 0$ үшін

$$T(t)x - x = A\int_0^t T(s)x\,ds, \quad x \in X,$$

ал егер $x \in D(A)$ болса, онда

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax\,ds$$

қасиеттерін қанағаттандырады.

1.3.4 – анықтама Қандай да бір Банах кеңістігіндегі A сызықты операторының (мүмкін шенелмеген) спектрлік шекарасы келесі формуламен анықталады:

$$s(A) := \sup\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

1.3.5 – анықтама Берілген $T = \{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ күшті үзіліссіз жартытобының (сәйкесінше, $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ күшті үзіліссіз тобының) *өсу шекарасы* келесідей анықталады:

$$\theta_0(T) := \inf\left\{\theta \in \mathbb{R} : \exists M_\theta \geq 1 \quad \begin{cases} \| T(t) \| \leq M_\theta e^{\theta t}, & t \in \mathbb{R}_+, \\ \| T(t) \| \leq M_\theta e^{\theta |t|}, & t \in \mathbb{R} \end{cases}\right\}$$

Жартытоп үшін өсу шекеарасын келесі пара-пар формуламен де сипаттауға болады [17]

$$\theta_0(T) = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \| T(t) \|}{t}.$$

Жалпы C_0-жартытоп үшін генератор спектрі мен жартытоп спектрі арасында спектрлік қосылу орындалғанымен, спектрлік бейнелеудің

$$\sigma\big(T(t)\big) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(A)}$$

түріндегі толық теңдігі қосымша шарттарсыз әрқашан орындала бермейді. Бұл қасиеттер күшті үзіліссіз жартытоптардың критикалық спектр ұғымы арқылы Нагель және Поланд жұмысында нақты сипатталған [78]. Сондықтан спектрлік бейнелеу теоремасын қолданғанда қарастырылатын жартытоптың немесе функционалдық қисаптың нақты шарттарын көрсету қажет.

Осы диссертацияда күшті үзіліссіз жартытоптар мен топтар теориясы жалпыланған Чезаро операторларының спектрін зерттеудің негізгі құралдарының бірі ретінде пайдаланылады. Қарастырылатын жалпыланған Чезаро операторлары сәйкес C_0 -жартытоптардың немесе C_0 -топтардың интегралдық түрлендірулер түрінде өрнектеледі.

1.4 Секторлық операторлар және функционалдық қисап

Секторлық операторлар теориясы күшті үзіліссіз жартытоптар және шенелмеген операторларға арналған функционалдық қисап теориясымен тығыз байланысты. Егер оператордың спектрі белгілі бір секторда орналасып, оның резольвентасы сектордан тыс сәйкес бірқалыпты бағалауларды қанағаттандырса, онда операторға голоморфты функцияларды қолдануға мүмкіндік беретін функционалдық қисап құруға болады. Секторлық операторларға арналған функционалдық қисаптың жалпы теориясы [19] еңбекте жүйелі түрде баяндалған. H^∞ -функционалдық қисаптың Банах кеңістіктеріндегі негізгі аспектілері Макинтош [99], Каулинг, Дауст, Макинтош және Яги [86], сондай-ақ Калтон және Кучеренко [97] жұмыстарында зерттелген.

Осы бөлімшеде біз секторлық операторларға арналған функционалдық қисаптағы негізгі ұғымдарды береміз, [19, 1.2, 2.1-2.3-бөлімдер] қараңыз.

1.4.1 - анықтама X Банах кеңістігіндегі анықталу облысы $D(A) \subset X$ болатын $A : D(A) \to X$ сызықты операторы *тұйық* оператор деп аталады, егер кез-келген $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset D(A)$ тізбегі үшін $li\, m_{n\to\infty} x_n = x \in X$ және $li\, m_{n\to\infty} Ax_n = y \in X$ болғанынан, $x \in D(A)$ және $Ax = y$ орындалса.

1.4.2 – анықтама Айталық, $\varphi \in [0, \pi]$ берілсін. Онда $0 < \varphi \leq \pi$ бұрышы болатын ашық сектор

$$S_\varphi := \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, \ |\arg z| < \varphi\}$$

арқылы анықталады. Ал $\varphi = 0$ болғанда

$$S_0 := (0, \infty).$$

1.4.3 - анықтама Айталық, $0 \le \varphi < \pi$ болсын. Онда қандай да бір Банах кеңістігінде анықталған A операторы φ *бұрышты секторлық оператор* деп аталады, егер

$$\sigma(A) \subset S_{\varphi}$$

және барлық $\varphi < \varphi' < \pi$ үшін

$$\sup\left\{\| \lambda(\lambda - A)^{-1} \|: \lambda \notin \overline{S_{\varphi'}}\right\} < \infty$$

орындалса. Сондай-ақ, $A \in \mathrm{Sect}(\varphi)$ арқылы белгілейміз.

1.4.4 - тұжырым [19, 2.1.1 - тұжырым] Айталық, A операторы – X Банах кеңістігінде анықталған тұйық сызықты оператор болсын. Егер

$$(-\infty, 0) \subset \rho(A)$$

және

$$M(A) := \sup_{\lambda > 0} \| \lambda(\lambda + A)^{-1} \| < \infty$$

болса, онда $M(A) \ge 1$ және

$$A \in \mathrm{Sect}\left(\pi - \arcsin(M(A)^{-1})\right)$$

болады.

Айталық, A және B — алгебралар болсын.

$$F: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$$

сызықтық бейнелеуі келесі шартты қанағаттандырса, алгебралық гомоморфизм деп аталады:

$$F(ab) = F(a)F(b), \qquad a, b \in \mathrm{A}.$$

1.4.5 - анықтама (Абстрактілі функционалдық қисап) Берілген X Банах кеңістігі үшін *абстракт функционалдық қисап* деп $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \mathcal{F})$ үштігін айтамыз, мұндағы:

- $\mathcal{M}$ — бірлігі бар коммутативті алгебра;
- $\mathcal{E}$ — $\mathcal{M}$ алгебрасының ішкіалгебрасы (бірлікті қамтуы міндетті емес);
- $\mathcal{F}:\mathcal{E}\to\mathcal{B}(X)$ — алгебралық гомоморфизм.

Айталық, $f\in\mathcal{M}$ болсын. Егер $\mathcal{E}$ ішкіалгебрасынан сондай e элементі табылып, $ef\in\mathcal{E}$ және $\mathcal{F}(e)$ операторы инъективті болса, онда f элементі $\mathcal{E}$ ішкіалгебрасы арқылы *регуляризацияланады* дейміз, ал e элементі — f элементі үшін *регуляризатор*.

Бұл жағдайда

$$\mathcal{F}(f):=\mathcal{F}(e)^{-1}\mathcal{F}(ef)$$

деп анықталады.

Айталық, $\Omega\subset\mathbb{C}$ ашық жиын болсын. Онда $\mathcal{M}(\Omega)$ және $\mathcal{O}(\Omega)$ арқылы сәйкесінше Ω жиынындағы мероморфты және голоморфты функциялар алгебраларын белгілейміз.

Айталық, $\varphi\in(0,\pi]$ және $f\in\mathcal{M}(S_\varphi)$ болсын. Онда f функциясының 0 нүктесіндегі $c\in\mathbb{C}_\infty:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ *полиномдық шегі* бар деп айтамыз, егер қандай да бір $\alpha>0$ үшін

$$f(z)-c=O(|z|^{\alpha}),\qquad z\to 0$$

орындалса.

Сондай-ақ, егер $c=0$ болса, онда f функциясын 0 нүктесінде *регулярлы кемиді* дейміз. Егер $c\in\mathbb{C}$ болса, онда f функциясының 0 нүктесінде *ақырлы полиномдық шегі* бар дейміз.

Осыған ұқсас, f функциясының ∞ нүтесіндегі $d\in\mathbb{C}_\infty$ *полиномдық шегі* бар деп айтамыз, егер қандай да бір $s'>0$ үшін

$$f(z)-d=O(|z|^{-s'}),\qquad z\to\infty$$

орындалса.

Егер $d=0$ болса, онда f функциясы ∞ нүктесінде *регулярлы кемиді* дейміз. Егер $d\in\mathbb{C}$ болса, онда f функциясының ∞ нүктесінде *ақырлы полиномдық шегі* бар дейміз.

Айталық, $\varphi \in (0,\pi]$ болсын. Онда S_φ жиынында Данфорд-Рис класы келесі келесідей анықталады,

$$H_0^\infty(S_\varphi) := \{ f \in H^\infty(S_\varphi) |\ f - 0 \text{ және } \infty \text{ нуктелерінде регурярлы кемиді} \},$$

мұндағы

$$H^\infty(S_\varphi) := \{ f \in \mathcal{O}(S_\varphi) |\ f \text{ шенелген} \}$$

S_φ жиынындағы барлық шенелген, голоморфты функциялар класы келесідей нормамен жабдықталған

$$\| f \|_{\infty, S_\varphi} = \sup\{ | f(z) |\ z \in S_\varphi \}.$$

Банах алгебрасы болады. Әлбетте, $H_0^\infty(S_\varphi)$ жиыны $H^\infty(S_\varphi)$ алгебрасының алгебралық идеалы болып табылады. Әрбір $f(z)$ функциясымен бірге $f(1/z)$ функциясы да $H_0^\infty(S_\varphi)$ жиынында қамтылған.

1.4.6 - анықтама *Кеңейтілген Данфорд–Рис классы* келесідей анықталады:

$$\mathcal{E}(S_\varphi) := H_0^\infty(S_\varphi) \oplus \operatorname{span}\{(1+z)^{-1}\} \oplus \operatorname{span}\{1\},$$

мұндағы $\oplus$ сызықтық кеңістіктердің тура қосындысын білдіреді.

1.4.7 - тұжырым [35] Айталық, $\varphi \in (0,\pi]$ және $f : S_\varphi \to \mathbb{C}$ голоморфты функция болсын. Онда келесі тұжырымдар өзара пара-пар:

- $f \in \mathcal{E}(S_\varphi)$;
- f шенелген және 0 мен ∞ нүктелерінде ақырлы полиномдық шегі бар.

1.4.8 – анықтама Айталық, $A \in \operatorname{Sect}(\psi)$ — бұрышы $\psi \in (0,\pi)$ болатын секторлық оператор болсын, ал $\varphi \in (\psi,\pi)$ болсын. Сонымен қатар $(\mathcal{E}(S_\varphi), \mathcal{M}(S_\varphi), \mathcal{F})$ — S_φ секторындағы абстрактілі функционалдық қисап болсын. A операторы үшін мероморфты функционалдық қисап келесі функциялар класында анықталады:

$$\mathcal{M}(S_\varphi)_A := \left\{ f \in \mathcal{M}(S_\varphi) \mid \exists e \in \mathcal{E}(S_\varphi) \text{ сондай } e(A) \text{ инъективті, } ef \in \mathcal{E}(S_\varphi) \right\}.$$

Осы жағдайда әрбір $f \in \mathcal{M}(S_\varphi)_A$ функциясы $\mathcal{E}(S_\varphi)$ арқылы *регуляризацияланады* деп аталады, ал мұндай e элементі f үшін *регуляризатор* деп аталады. Сонда

$$f(A) := e(A)^{-1}(ef)(A)$$

деп анықталады, мұндағы $e \in \mathcal{E}(S_\varphi)$ — f үшін регуляризатор.
Онда біз

$$\mathcal{M}[S_\psi]_A := \bigcup_{\varphi \in (\psi, \pi)} \mathcal{M}(S_\varphi)_A$$

анықтаймыз.
1.4.9 теорема [19] Айталық $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ және $f \in M[S_\omega]_A$ функциясының $\{0, \infty\} \cap \bar{\sigma}(A)$ жиынында полиномдық шектері бар болсын. Онда

$$f(\bar{\sigma}(A)) = \bar{\sigma}(f(A)),$$

мұндағы

$$\bar{\sigma}(A) = \begin{cases} \sigma(A), & A \in B(X), \\ \sigma(A) \cup \{\infty\}, & A \text{ шенелмеген.} \end{cases}$$

Жартытоп генераторларына арналған функционалдық қисаптың классикалық түрлерінің бірі Хилле–Филлипс функционалдық қисабы болып табылады [72]. Егер $-A$ күшті үзіліссіз шенелген жартытоптың генераторы болып, f функциясы белгілі бір өлшемнің немесе интегралданатын функцияның Лаплас түрлендіруі арқылы берілсе, онда сәйкес шарттарда $f(A)$ операторы жартытоптың Бохнер интегралы арқылы анықталады. Бұл идея кейін әртүрлі бағыттарда кеңейтілді. Атап айтқанда, C_0-топтар үшін функционалдық қисап және трансференс әдістері [88–92, 98, 100] еңбектерде, ал секторлық операторлар мен голоморфты жартытоптар үшін [87, 93–96] жұмыстарда зерттелген.

Функционалдық қисапты спектрлік есептерде қолданудың негізгі артықшылығы — A операторының спектрі белгілі болған жағдайда $f(A)$ операторының спектрін f функциясы арқылы сипаттау мүмкіндігі. Бұл жерде спектрлік бейнелеу теоремалары негізгі рөл атқарады. Дегенмен шенелмеген операторлар жағдайында классикалық

$$\sigma\big(f(A)\big) = f\big(\sigma(A)\big)$$

теңдігі барлық функциялар мен барлық функционалдық қисаптар үшін автоматты түрде орындалмайды. Сондықтан операторлардың секторлылығы, функцияның голоморфтылығы, оның нөлдегі және шексіздіктегі өсуі, сондай-ақ қолданылатын функционалдық қисаптың түрі ескерілуі тиіс. Секторлық операторларға арналған спектрлік бейнелеу теоремалары [19, 94-96] еңбектерде, ал бір параметрлі топтардың ұсынылымдары үшін арнайы спектрлік бейнелеу нәтижелері [35] жұмыста қарастырылған.

Соңғы жылдары Хилле–Филлипс функционалдық қисабын кеңейтетін Бесов типті функционалдық қисаптар да дамытылды. Батти, Гомилко және Томилов еңбектерінде жартытоп генераторлары үшін Бесов алгебраларына негізделген функционалдық қисап құрылып [94, 95], оның спектрлік бейнелеу қасиеттері және секторлық операторлармен байланысы зерттелді [95, 96]. Секторлық операторлар үшін резольвенталық көрсетілімдер [93] жұмыста қарастырылып, функционалдық қисап пен голоморфты C_0-жартытоптардың арасындағы байланыс нақтыланды.

2 Гильберт түрлендіруінің спектрі

2.1 Гильберт түрлендіруі және оның негізгі қасиеттері

Гильберт түрлендіруі сингулярлы интегралдық операторлардың негізгі мысалдарының бірі болып табылады. Ол гармониялық талдауда, комплекс айнымалы функциялар теориясында және функциялар кеңістіктері теориясында маңызды рөл атқарады.

2.1.1 - анықтама Берілген $\Omega \in \mathbb{R}$ жиындарында анықталған f локалды интегралданатын функциясы үшін

$$(H_\Omega f)(x) := \frac{1}{\pi i}\, p.v. \int_\Omega \frac{f(t)}{t-x} dt \qquad (2.1.1)$$

өрнегі Гильберт түрлендіруі деп аталады. Мұндағы $p.v.$ - Кошидің бас мәні мағынасын білдіреді.

Гильберт түрлендіруін толық өс, жарты өс және ақырлы аралықта жеке қарастыру қажет, өйткені бір типті сингулярлы ядромен анықталғанымен, бұл операторлардың функционалдық-аналитикалық және спектрлік қасиеттері анықталу облысына елеулі түрде тәуелді. Атап айтқанда, облыс геометриясы спектрдің, нүктелік спектрдің және резольвенттік жиынның құрылымына тікелей ықпал етеді. Сондықтан әрбір жағдайда оператордың қасиеттерін жеке зерттеу табиғи болып табылады.

Ақырлы аралықтағы Гильберт түрлендіруі дербес зерттеу бағытын құрайды. Оның классикалық теориясы Трикоми монографиясында берілген [38]. Курбера, Окада және Риккер ақырлы Гильберт түрлендіруінің симметриялық кеңістіктердегі шенелгендігін, кеңейтілуін және интегралдық көрсетілімдерін зерттеді [15, 42]. Кейін оператордың әрі қарай кеңейтілмеу қасиеті және табиғи анықталу облыстарының оптималдылығы сипатталды [43]. Сонымен қатар, $L \log L$ Зигмунд кеңістігіндегі қасиеттері [44]-те, ал өлшемдік-теориялық және векторлық өлшемдермен байланысы [45]-те қарастырылды.

Гильберт түрлендіруінің спектрлік теориясы да анықталу облысына байланысты дамыды. Толық және жарты өстердегі L_p-кеңістіктері үшін спектр мен нүктелік спектр Йоргенс жұмысында зерттелген [22], ал L_p -кеңістіктеріндегі спектрлік сипаттаулар Уйдом еңбегінде алынған [39]. Бұл нәтижелер кейін симметриялық кеңістіктерге жалпыланды: ақырлы аралықтағы жағдай [15]-те, толық өстегі Орлич кеңістіктері [3]-те, ал толық және жарты өстердегі Лоренц кеңістіктері [4]-те қарастырылды.

Симметриялық кеңістіктердегі Гильберт және Стилтьес түрлендірулерінің оптимал анықталу және мәндер кеңістіктері [47]-де, ал Кальдерон операторының оптимал мәндер кеңістігі және оның Гильберт түрлендіруіне қолданылуы [48]-де

қарастырылған. Гильберт түрлендіруінің бір симметриялық кеңістіктен екіншісіне әсері үшін оптимал мәндер кеңістіктері Лоренц кеңістіктер жағдайында [49] жұмысында және жалпы симметриялық Банах функциялар кеңістіктері үшін [50]-де зерттелген.

Осылайша, Гильберт түрлендіруінің қасиеттері сонымен бірге функциялық кеңістіктің геометриялық құрылымына да тәуелді. Бұл толық өс, жарты өс және ақырлы аралықтағы Гильберт түрлендіруін, сондай-ақ Лебег, Лоренц, Орлич және жалпы симметриялық кеңістіктердегі олардың спектрлік қасиеттерін бөлек зерттеудің қажеттігін көрсетеді.

Сондай-ақ, H жұп функцияны тақ функцияға, ал тақ функцияны жұп функцияға бейнелейді. $1 < p < \infty$ кезінде ол $L_p(\mathbb{R})$-де шенелген, ал $p = 1$шеткі жағдайда әлсіз $(1,\ 1)$-типті бағалау орындалады. Гильберт түрлендіруінің аталған негізгі қасиеттері [23, 36, 37] жұмыстарда баяндалған.

2.2 Жарты өсте анықталған Лоренц кеңістіктеріндегі Гильберт түрлендіруінің спектрі

Бұл бөлімде $L_{p,q}$ Лоренц кеңістіктерінде анықталған Гильберт түрлендіруінің спектрлік қасиеттері зерттеледі. Осы бөлімдегі нәтижелер [4] жұмысында жарияланған. Алдымен Бойдтың нәтижесіне сүйене отырып, осы оператордың аталған кеңістіктерде шенелген екендігін көрсетеміз. Содан кейін $\mathbb{R}_+$ жағдайында спектрдің нақты сипаттамасын беріп, резольвентаның айқын формуласын жазамыз. Негізгі дәлелдеулерде Йоргенс алған нәтижелер қолданылады.

Еске салайық, $L_{p,q}$ кеңістігіндегі Гильберт түрлендіруі (2.1.1) формуласы арқылы анықталады.

2.2.1 - тұжырым [9] Айталық, $1< p<\infty$ және $1\le q\le\infty$ болсын. Онда

$$H_{\mathbb{R}_+}\in\mathcal{B}\big(L_{p,q}(\mathbb{R}_+)\big) \quad \text{және} \quad H_{\mathbb{R}}\in\mathcal{B}\big(L_{p,q}(\mathbb{R})\big).$$

1.2.7- тұжырым бойынша сызықты шенелген оператордың спектрі бос емес болғандықтан, біз енді $H_{\mathbb{R}_+}$ операторының спектрін сипаттаймыз. Келесі теорема осы бөлімшенің негізгі нәтижелерінің бірі болып табылады. Дәлелдеуде біз, негізінен, [22] жұмысындағы $L_p(\mathbb{R}_+)$ үшін алынған резольвенталық формуланы пайдаланамыз.

2.2.2 – теорема [4] Айталық, $1< p<\infty$ және $1\le q<\infty$ болсын. Онда $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ кеңістігінде анықталған $H_{\mathbb{R}_+}$ Гильберт түрлендіруі үшін спектр жиыны

$$\sigma(H_{\mathbb{R}_+}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \pm 1 \ \& \ \frac{1}{2\pi} \arg \frac{\lambda+1}{\lambda-1} = \frac{1}{p} \right\}$$

түрінде болады. Сондай-ақ, егер $\lambda \in \rho(H_{\mathbb{R}_+})$ болса, онда

$$R(\lambda, H_{\mathbb{R}_+}) f(x) = (\lambda^2 - 1)^{-1} \left\{ \lambda f(x) + \frac{1}{\pi i} \text{p.v.} \int_0^\infty \left(\frac{y}{x} \right)^{w(\lambda)} \frac{f(y)}{y-x} dy \right\},$$

мұндағы

$$w(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \log \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$$

функциясы $\rho(H_{\mathbb{R}_+})$ облысында голоморфты функция және $w(\infty) = 0$.

Дәлелдеуі: Алдымен келесі жиынды

$$\Gamma_p := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\} : \frac{1}{2\pi} \arg \frac{\lambda+1}{\lambda-1} = \frac{1}{p} \right\}$$

деп белгілейік. Бұл жиын -1 және 1 нүктелері арқылы өтетін, әрі $-i\cot(\pi/p)$ нүктесін қамтитын шеңбер доғасы болып табылады.

Шынында, $\lambda = x + iy$ деп алсақ, келесі қатынасты аламыз

$$\frac{\lambda+1}{\lambda-1} = \frac{x+1+iy}{x-1+iy} = \frac{(x^2+y^2-1)-2iy}{(x-1)^2+y^2}.$$

Осыдан нақты және жорамал бөліктерді

$$\Re\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1} \right) = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}, \qquad \Im\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1} \right) = \frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}.$$

түрінде екенін көреміз. Демек, $p \neq 2$ үшін бастапқы

$$\arg \frac{\lambda+1}{\lambda-1} = \frac{2\pi}{p}$$

шарты бойынша

$$\tan\frac{2\pi}{p}=\frac{\Im\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)}{\Re\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)}=\frac{-2y}{x^2+y^2-1}$$

түріне келеді. Мұны ықшамдап жазсақ,

$$x^2+y^2-1+2y\cot\frac{2\pi}{p}=0.$$

Енді шеңбердің теңдеуіне келтіру арқылы төмендегі қатынасты аламыз

$$x^2+\left(y+\cot\frac{2\pi}{p}\right)^2=\csc^2\frac{2\pi}{p}.$$

Сонымен, Γ_p жиыны келесі түрдегі толық шеңбердің бойында жатады:

$$x^2+\left(y+\cot\frac{2\pi}{p}\right)^2=\csc^2\frac{2\pi}{p}.$$

Бұл шеңбердің центрі

$$\left(0,-\cot\frac{2\pi}{p}\right),$$

ал радиусы

$$\left|\csc\frac{2\pi}{p}\right|$$

болады.

Енді бұл шеңбердің -1 және 1 нүктелері арқылы өтетінін тексерейік. Егер $\lambda=1$, яғни $(x,y)=(1,0)$ нүктесі болса, онда

$$1+\cot^2\frac{2\pi}{p}=\csc^2\frac{2\pi}{p},$$

теңдігі орындалады, яғни $(1,0)$ нүктесі шеңберге жатады. Дәл осылай $(x,y)=(-1,0)$ нүктесі үшін де

$$1+\cot^2\frac{2\pi}{p}=\csc^2\frac{2\pi}{p}.$$

теңдігін аламыз. Сондықтан $(-1,0)$ нүктесі де осы шеңбердің бойында жатады.

Осылайша, Γ_p жиыны -1 мен 1 нүктелерін қосатын шеңбердің бір доғасы. Бұл жиынның гафигін 2.1-суреттен көреміз.

Бұл жиынды геометриялық тұрғыдан былай да түсіндіруге болады:

$$\arg\frac{\lambda+1}{\lambda-1}=\arg(\lambda+1)-\arg(\lambda-1)$$

өрнегі λ нүктесінен -1 және 1 нүктелеріне жүргізілген кесінділер арасындағы бағытталған бұрышты сипаттайды. Демек, бұл бұрыш тұрақты болғанда, λ нүктелерінің геометриялық орны -1 мен 1 нүктелерін кететін шеңбердің доғасы болады.

Сонымен қатар, $\lambda=-i\cot\frac{\pi}{p}$ болғанда

$$\frac{\lambda+1}{\lambda-1}=\frac{1-i\cot(\pi/p)}{-1-i\cot(\pi/p)}=e^{2\pi i/p},$$

теңдігін аламыз. Сол себепті

$$\arg\frac{\lambda+1}{\lambda-1}=\frac{2\pi}{p}$$

теңдігі орындалады, яғни,

$$-i\cot\frac{\pi}{p}\in\Gamma_p.$$

Демек, $p\neq 2$ үшін Γ_p жиыны -1, 1 және $-i\cot\frac{\pi}{p}$ нүктелері арқылы өтетін шеңбердің сәйкес доғасы.

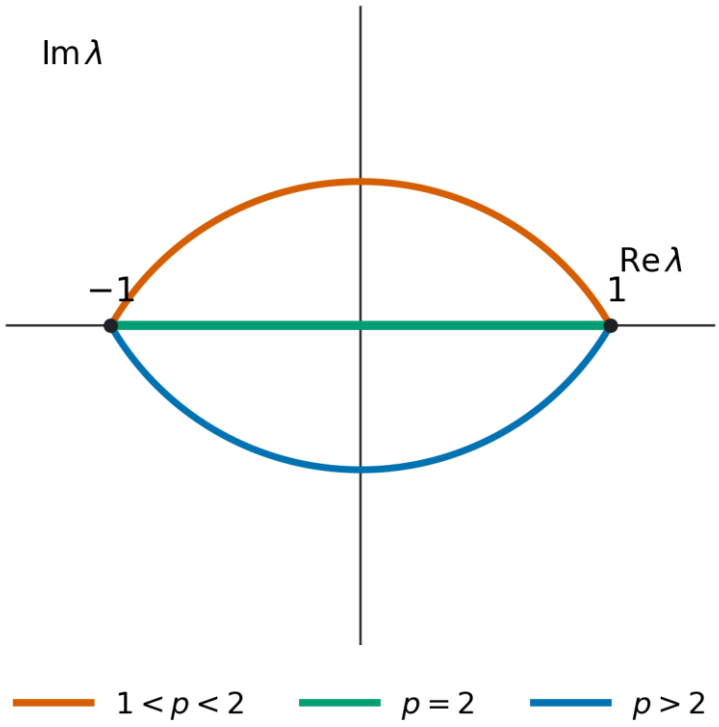
Жеке $p=2$ жағдайда Γ_2 жиынын анықтайтын шарт

$$\arg\frac{\lambda+1}{\lambda-1}=\pi$$

түріне келеді. Бұл бөлшек теріс нақты сан болуы үшін $\lambda=x\in\mathbb{R}$ және $-1<x<1$ болуы қажет. Сондықтан, $p=2$ жағдайы үшін

$$\Gamma_2=(-1,1)$$

аламыз. Келесі сурет 1.-ден көреміз.



Сурет 1. Γ_p жиынының графигі

Ыңғайлылық үшін

$$\bar{\Gamma}_p:=\Gamma_p\cup\{-1,1\},\qquad \Lambda_p:=\mathbb{C}\setminus\bar{\Gamma}_p$$

деп жазамыз.

Айталық, Λ_p облысында логарифмнің бір тармағын таңдап,

$$w(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\log\frac{\lambda+1}{\lambda-1},\qquad \lambda\in\Lambda_p,$$

функциясын анықтаймыз. Бұл функция голоморфты және $\lambda \in \Lambda_p$ үшін

$$\frac{1}{p} - 1 < \Re w(\lambda) < \frac{1}{p}.$$

шартын қанағаттандырады. Яғни,

$$w(\Lambda_p) = \Sigma_p := \left\{ w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \frac{1}{p} - 1 < \Re w < \frac{1}{p} \right\}.$$

Йоргенстің нәтижесі бойынша [22, 13.8 - теорема], $\lambda \in \Lambda_p$ үшін $L_p(\mathbb{R}_+)$ кеңістігіндегі Гильберт түрлендіруінің резольвентасы

$$R(\lambda, H_{\mathbb{R}_+}) f(x) = (\lambda^2 - 1)^{-1} \left\{ \lambda f(x) + \frac{1}{\pi i} \text{p.v.} \int_0^\infty \left(\frac{y}{x} \right)^{w(\lambda)} \frac{f(y)}{y - x} dy \right\}$$

өрнегі арқылы беріледі.

Енді $\lambda \in \Lambda_p$ бекітіп, жоғарыдағы формуламен берілген операторды K_λ деп белгілейік. Бойдтың интерполяциялық нәтижесі бойынша [10, 1- салдар], K_λ операторы $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ кеңістігінде де шенелген. Ал $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ кеңісті $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ кеңістігінде тығыз болғандықтан, $H_{\mathbb{R}_+}$ операторларының $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ кеңістігіндегі әсерлері бірдей екендігін ескеріп,

$$(\lambda I - H_{\mathbb{R}_+}) K_\lambda f = f, \qquad K_\lambda (\lambda I - H_{\mathbb{R}_+}) f = f, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+),$$

теңдіктерін барлық $f \in L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ үшін үзіліссіз жалғастыра аламыз. Сонымен,

$$K_\lambda = R(\lambda, H_{\mathbb{R}_+}), \qquad \lambda \in \Lambda_p.$$

Сондай-ақ,

$$\Lambda_p \subset \rho(H_{\mathbb{R}_+})$$

Енді $\lambda_0 \in \Gamma_p$ болсын және сонымен қатар $\lambda_0 \in \rho(H_{\mathbb{R}_+})$ деп ұйғарайық. Онда $\rho(H_{\mathbb{R}_+})$ ашық жиын болғандықтан, λ_0 нүктесінің қандай да бір U маңайы түгелдей $\rho(H_{\mathbb{R}_+})$ жиынының ішінде жатады. Ал $U \cap \Lambda_p$ жиыны Γ_p доғасының екі жағынан да нүктелерді қамтиды.

Онда $\lambda \to \lambda_0$ кезінде $w(\lambda)$ функциясының екі шекаралық мәнін тиісінше $w_+(\lambda_0)$ және $w_-(\lambda_0)$ деп белгілейік. Онда логарифмнің тармақтары бір бүтін санға ғана өзгешеленетіндіктен,

$$w_+(\lambda_0) - w_-(\lambda_0) = -1.$$

теңдігін аламыз.

Тікелей есептеу арқылы кез-келген $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ функциялары үшін

$$\int_0^\infty g(x) R_+(\lambda_0, H_{\mathbb{R}_+}) f(x)\,dx - \int_0^\infty g(x) R_-(\lambda_0, H_{\mathbb{R}_+}) f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi i(\lambda_0^2 - 1)} \int_0^\infty g(x) \int_0^\infty \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{w_+(\lambda_0)} - \left(\frac{y}{x}\right)^{w_-(\lambda_0)}}{y - x} f(y)\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi i(\lambda_0^2 - 1)} \int_0^\infty g(x) \int_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{w_+(\lambda_0)} \frac{1 - \frac{y}{x}}{y - x} f(y)\,dy\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi i(\lambda_0^2 - 1)} \int_0^\infty x^{-w_+(\lambda_0)-1} g(x)\,dx \int_0^\infty y^{w_+(\lambda_0)} f(y)\,dy.$$

қатынасын аламыз. Енді біз функцияларды

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1 - |x-2|^2}\right), & x \in (1,3), \\ 0, & x \notin [1,3], \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1 - |x-5|^2}\right), & x \in (4,6), \\ 0, & x \notin [4,6] \end{cases}$$

деп алайық. Онда $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, әрі $f \not\equiv 0$, $g \not\equiv 0$. Сонымен қатар, $y^{w_+(\lambda_0)}$ функциясы $(1,3)$ аралығында, ал $x^{-w_+(\lambda_0)-1}$ функциясы $(4,6)$ аралығында үзіліссіз және нөлге тең емес. Сондықтан

$$\int_0^\infty y^{w_+(\lambda_0)} f(y)\,dy \neq 0,$$

$$\int_0^\infty x^{-w_+(\lambda_0)-1} g(x)\,dx \neq 0.$$

шарттары орынды. Олай болса, жоғарыдағы теңдіктің оң жағы нөлге тең болмайды. Демек,

$$\int_0^\infty g(x) R_+(\lambda_0, H_{\mathbb{R}_+}) f(x)\,dx \neq \int_0^\infty g(x) R_-(\lambda_0, H_{\mathbb{R}_+}) f(x)\,dx.$$

Олай болса, λ_0 резолвенттік жиында жатпайды,

$$\lambda_0 \notin \rho(H_{\mathbb{R}_+}).$$

Демек, Γ_p жиыны спектр жиынында жатады, яғни

$$\Gamma_p \subset \sigma(H_{\mathbb{R}_+}).$$

Біз $\Lambda_p \subset \rho(H_{\mathbb{R}_+})$ және $\Gamma_p \subset \sigma(H_{\mathbb{R}_+})$ екенін көрсеттік. Спектр әрқашан тұйық жиын болатындықтан, Γ_p доғасының шеткі нүктелері -1 мен 1 де $\sigma(H_{\mathbb{R}_+})$ жиынына тиесілі. Сондықтан

$$\overline{\Gamma}_p \subset \sigma(H_{\mathbb{R}_+}).$$

Екінші жағынан, біз көрсеткендей

$$\sigma(H_{\mathbb{R}_+}) \subset \mathbb{C} \setminus \Lambda_p = \overline{\Gamma}_p.$$

орындалады. Сондықтан

$$\sigma(H_{\mathbb{R}_+}) = \overline{\Gamma}_p.$$

теңдігі орынды. Теорема толық дәлелденді.

Ескерту: $q=\infty$ жағдайында $L_{p,\infty}(\mathbb{R}_+)$ кеңістігі сепарабельді емес, сондай-ақ $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ кеңістігі бұл кеңістікте тығыз емес. Сондықтан алдыңғы теоремадағы тығыздыққа сүйенетін бөлікті дәл сол күйінде көшіруге болмайды. Дегенмен шекаралық мәндердің секірісіне негізделген аргумент сақталады, сондықтан бұл жағдайды жеке тұжырым түрінде баяндаймыз.

2.2.3 - тұжырым Айталық, $1<p<\infty$ болсын. Онда (2.1.1) формуласы арқылы анықталған

$$H_{\mathbb{R}_+}: L_{p,\infty}(\mathbb{R}_+)\to L_{p,\infty}(\mathbb{R}_+)$$

Гильберт түрлендіруі үшін спектр жиыны

$$\sigma(H_{\mathbb{R}_+})=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda=\pm1 \text{ немесе } \frac{1}{2\pi}\arg\frac{\lambda+1}{\lambda-1}=\frac{1}{p}\right\}$$

түрінде болады. Сонымен қатар, егер $\lambda\in\rho(H_{\mathbb{R}_+})$ болса, онда

$$R(\lambda,H_{\mathbb{R}_+})f(x)=(\lambda^2-1)^{-1}\left\{\lambda f(x)+\frac{1}{\pi i}\text{p.v.}\int_0^\infty\left(\frac{y}{x}\right)^{w(\lambda)}\frac{f(y)}{y-x}dy\right\},$$

мұндағы

$$w(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\log\frac{\lambda+1}{\lambda-1},\qquad w(\infty)=0.$$

Дәледеуі: Жоғарыдағыдай $\Lambda_p=\mathbb{C}\setminus\overline{\Gamma}_p$ деп алайық. [10, 1- салдар] бойынша $\lambda\in\Lambda_p$ үшін $R(\lambda,H_{\mathbb{R}_+})$ операторы $L_{p,\infty}(\mathbb{R}_+)$ кеңістігінде де шенелген. Сондықтан дәл сол формула

$$R(\lambda,H_{\mathbb{R}_+})f(x)=(\lambda^2-1)^{-1}\left\{\lambda f(x)+\frac{1}{\pi i}\text{p.v.}\int_0^\infty\left(\frac{y}{x}\right)^{w(\lambda)}\frac{f(y)}{y-x}dy\right\}$$

түрінде жазылады және

$$\Lambda_p \subset \rho(S_{p,\infty}).$$

Енді $\lambda_0 \in \Gamma_p$ болсын. Егер $\lambda_0 \in \rho(H_{\mathbb{R}_+})$ деп ұйғарсақ, онда резольвента λ_0 маңайында голоморфты функция болады. Бірақ алдыңғы теоремада алынған шек мәндердің секірісі туралы есептеу бұл жерде де өзгеріссіз орындалады, себебі онда тек $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+) \subset L_{p,\infty}(\mathbb{R}_+)$ функциялары ғана қолданылады. Сондықтан резольвентаның екі жақтан алынған шек мәндері бірдей бола алмайды. Бұл қайшылықтан

$$\Gamma_p \subset \sigma(H_{\mathbb{R}_+})$$

екені шығады.

Спектрдің тұйықтығын тағы да пайдаланып, -1 мен 1 нүктелерінің де спектрге тиесілі екенін аламыз. Екінші жағынан, $\Lambda_p \subset \rho(H_{\mathbb{R}_+})$ қатынасын пайдаланы келесі қатынасты аламыз

$$\sigma(H_{\mathbb{R}_+}) \subset \overline{\Gamma}_p.$$

Сондықтан келесі теңдік дұрыс

$$\sigma(H_{\mathbb{R}_+}) = \overline{\Gamma}_p.$$

Тұжырым толық дәлелденді.

2.3 Толық өсте анықталған Лоренц кеңістіктеріндегі Гильберт түрлендіруінің спектрі

Енді есепті $\mathbb{R}$ толық өсінде қарастырамыз. Бұл жағдайда спектрлік көрініс анағұрлым қарапайым болады. Гильберт түрлендіруі алгебралық оператор болатынын және оның спектрі тек екі нүктеден тұратыны көрсетіледі. Сонымен қатар, осы нүктелердің нүктелік спектрге тиесілі екені және резольвентаның айқын формуласы анықталады.

Алдымен кейінгі талқылауларда қолданылатын қарапайым лемманы келтіреміз.

2.3.1 – лемма Айталық, $1 < p < \infty$ және $1 \le q < \infty$ болсын. Онда $H_{\mathbb{R}} : L_{p,q}(\mathbb{R}) \to L_{p,q}(\mathbb{R})$ Гильберт түрлендіруі үшін

$$H_{\mathbb{R}}^2 = I$$

теңдігі орындалады, мұндағы I – бірлік оператор.
Дәлелдеуі: [33] жұмысы бойынша кез-келген $g \in L_2(\mathbb{R})$ функциясы үшін

$$H_{\mathbb{R}}{}^2 g = g$$

теңдігі орындалады. Сондай-ақ, бұл теңдік $g \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_{p,q}(\mathbb{R})$ болғанда да дұрыс.

Айталық, $\psi \in L_{p,q}(\mathbb{R})$ болсын. Онда 1.1.14 - тұжырым бойынша $L_2(\mathbb{R}) \cap L_{p,q}(\mathbb{R})$ кеңістігі $L_{p,q}(\mathbb{R})$ кеңістігінде тығыз, сондықтан $f_n \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_{p,q}(\mathbb{R})$ тізбегі табылып, $n \to \infty$ үшін $f_n \to \psi$ шек $L_{p,q}(\mathbb{R})$ кеңістігінде орындалады. Әрбір n үшін $H_{\mathbb{R}}^2 f_n = f$ болады, сондықтан $n \to \infty$ кезінде

$$\| H_{p,q}^2 \psi - \psi \|_{L_{p,q}(\mathbb{R})} \le \| H_{p,q}^2 (\psi - f_n) \|_{L_{p,q}(\mathbb{R})} + \| \psi - f_n \|_{L_{p,q}(\mathbb{R})}$$

$$\le \left(\| H_{p,q}^2 \|_{L_{p,q} \to L_{p,q}} + 1 \right) \| \psi - f_n \|_{L_{p,q}(\mathbb{R})} \to 0$$

орындалады. Демек, $H_{p,q}^2 \psi = \psi$ барлық $\psi \in L_{p,q}(\mathbb{R})$ үшін орындалады. Лемма дәлелденді.

Енді $\mathbb{R}$ толық өсінде анықталған Лоренц кеңістігінде Гильберт түрлендіруінің спектрін сипаттаймыз.
2.3.2 - теорема Айталық, $1 < p < \infty$ және $1 \le q < \infty$ болсын. Онда $H_{\mathbb{R}} : L_{p,q}(\mathbb{R}) \to L_{p,q}(\mathbb{R})$ Гильберт түрлендіруінің спектрі келесі түрде беріледі

$$\sigma(H_{\mathbb{R}}) = \sigma_p(H_{\mathbb{R}}) = \{-1, 1\}.$$

Сонымен қатар, әрбір $\lambda \in \rho(H_{\mathbb{R}})$ үшін резольвента

$$R(\lambda, H_{\mathbb{R}}) = \frac{1}{2}(\lambda + 1)^{-1}(I - H_{\mathbb{R}}) + \frac{1}{2}(\lambda - 1)^{-1}(I + H_{\mathbb{R}})$$

өрнегі арқылы беріледі.
Дәлелдеуі: 2.3.1 - лемма бойынша бізде келесі теңдік бар

$$H_{\mathbb{R}}^2 = I.$$

Сондықтан, $H_{\mathbb{R}}$ Гильберт түрлендіруі үшін

$$p(H_{\mathbb{R}}) = I - H_{\mathbb{R}}^2 = 0$$

болады, мұндағы $p(\lambda) = 1 - \lambda^2$.

Демек, $H_{\mathbb{R}}$ Гильберт түрлендіруі - алгебралық оператор.

Енді $H_{\mathbb{R}}$ Гильберт түрлендіруі үшін минимал көпмүшесінің ең үлкен дәрежесі 1 болмайтынын көрсетейік. Расында, егер $H_{\mathbb{R}} = I$ болса, онда кез-келген нөлден өзге тақ функция үшін $H_{\mathbb{R}} f = f$ болар еді, бұл мүмкін емес. Сол сияқты, егер $H_{\mathbb{R}} = -I$ болса, онда кез-келген нөлден өзге жұп функция үшін $H_{\mathbb{R}} f = -f$ болар еді, бұл да мүмкін емес. Сондықтан $H_{\mathbb{R}}$ Гильберт түрлендіруінің минимал көпмүшесі

$$p(\lambda) = 1 - \lambda^2$$

болады. Ендеше 1.2.8-тұжырым бойынша $H_{\mathbb{R}}$ операторының спектрі 1 және -1 нүктелерінен тұрады, яғни,

$$\sigma(H_{\mathbb{R}}) = \{-1, 1\}.$$

Енді осы екі нүктенің нүктелік спектрге тиесілі екенін көрсетейік. Демек, 2.3.1 - лемма бойынша

$$(I - H_{\mathbb{R}})(I + H_{\mathbb{R}}) = 0$$

теңдігі орындалады. Сондай-ақ, $H_{\mathbb{R}} \neq -I$ болғандықтан, $I + H_{\mathbb{R}} \neq 0$ болады. Сондықтан нөлден өзге қандай да бір $f \in L_{p,q}(\mathbb{R})$ үшін $(I + H_{\mathbb{R}}) f \neq 0$ болады. Егер сол f функциясы үшін

$$g := (I + H_{\mathbb{R}}) f$$

деп белгілесек, онда $g \neq 0$ және келесі теңдік орындалады:

$$(I - H_{\mathbb{R}}) g = (I - H_{\mathbb{R}})(I + H_{\mathbb{R}}) f = 0.$$

Демек, $H_{\mathbb{R}} g = g$, яғни $1 \in \sigma_p(H_{\mathbb{R}})$.

Дәл осылай, $H_{\mathbb{R}} \neq I$ болғандықтан, $I - H_{\mathbb{R}} \neq 0$. Сондықтан нөлден өзге қандай да бір $u \in L_{p,q}(\mathbb{R})$ үшін $(I - H_{\mathbb{R}})u \neq 0$ болады. Егер сол u функциясы үшін

$$v := (I - H_{\mathbb{R}})u$$

деп белгілесек, онда $v \neq 0$ және

$$(I + H_{\mathbb{R}})v = (I + H_{\mathbb{R}})(I - H_{\mathbb{R}})u = 0$$

болады. Осыдан $H_{\mathbb{R}}v = -v$, яғни $-1 \in \sigma_p(H_{\mathbb{R}})$ болады. Сонымен, осы есептеулер бойынша

$$\{-1,1\} \subset \sigma_p(H_{\mathbb{R}}) \subset \sigma(H_{\mathbb{R}}) = \{-1,1\},$$

екенін көреміз. Демек, $H_{\mathbb{R}}$ Гильберт түрлендіруінің спектрі

$$\sigma(H_{\mathbb{R}}) = \sigma_p(H_{\mathbb{R}}) = \{-1,1\}.$$

түрінде болады. Енді $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1,1\}$ болсын. Онда есептеу бойынша келесі теңдікті аламыз,

$$(\lambda I - H_{\mathbb{R}})(\lambda I + H_{\mathbb{R}}) = \lambda^2 I - H_{\mathbb{R}}^2 = (\lambda^2 - 1)I.$$

Бұл қатынастан $H_{\mathbb{R}}$ Гильберт түрлендіруі үшін резолвенттік оператор

$$R(\lambda, H_{\mathbb{R}}) = (\lambda I - H_{\mathbb{R}})^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 - 1}(\lambda I + H_{\mathbb{R}}).$$

түрінде өрнектелетінін көреміз. Соңғы өрнекті жіктеп жазып, келесі өрнекті аламыз:

$$\frac{1}{\lambda^2 - 1}(\lambda I + H_{\mathbb{R}}) = \frac{1}{2}(\lambda + 1)^{-1}(I - H_{\mathbb{R}}) + \frac{1}{2}(\lambda - 1)^{-1}(I + H_{\mathbb{R}}).$$

Теорема толық дәлелденді.

Алдыңғы бөлімдегідей, $q = \infty$ жағдайын жеке қарастырамыз.

2.3.3 – тұжырым Айталық $1 < p < \infty$ болсын. Онда $H_{\mathbb{R}} : L_{p,\infty}(\mathbb{R}) \to L_{p,\infty}(\mathbb{R})$ Гильберт түрлендіруі үшін спектр

$$\sigma(H_{\mathbb{R}}) = \sigma_p(H_{\mathbb{R}}) = \{-1,1\}.$$

Ал әрбір $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1,1\}$ үшін резольвента

$$R(\lambda, H_{\mathbb{R}}) = \frac{1}{2}(\lambda+1)^{-1}(I - H_{\mathbb{R}}) + \frac{1}{2}(\lambda-1)^{-1}(I + H_{\mathbb{R}})$$

өрнегі арқылы беріледі.
Дәлелдеуі: Айталық, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1,1\}$ болсын. Онда

$$sh_{L_{p,\infty}(\mathbb{R})}(s) \to 0 \quad (s \to 0^+), \qquad h_{L_{p,\infty}(\mathbb{R})}(s) \to 0 \quad (s \to \infty),$$

болғандықтан, [10, 1- салдар] бойынша $R(\lambda, H_{\mathbb{R}})$ операторы $L_{p,\infty}(\mathbb{R})$ кеңістігінде де шенелген болады. $H_{\mathbb{R}} : L_{p,\infty}(\mathbb{R}) \to L_{p,\infty}(\mathbb{R})$ және $H_{\mathbb{R}} : L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\mathbb{R})$ операторларының әсері бірдей болғандықтан, $H_{\mathbb{R}} : L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\mathbb{R})$ операторының резольвенттік операторын $H_{\mathbb{R}} : L_{p,\infty}(\mathbb{R}) \to L_{p,\infty}(\mathbb{R})$ операторының резольвентасы ретінде қарастыруға болады. Сондықтан $H_{\mathbb{R}} : L_{p,\infty}(\mathbb{R}) \to L_{p,\infty}(\mathbb{R})$ операторының спектрі

$$\sigma(H_{\mathbb{R}}) \subset \{-1,1\}$$

және $\lambda \in \rho(H_{\mathbb{R}})$ үшін $H_{\mathbb{R}}$ Гильберт түрлендіруінің резолвенттік операторы

$$R(\lambda, H_{\mathbb{R}}) = \frac{1}{2}(\lambda+1)^{-1}(I - H_{\mathbb{R}}) + \frac{1}{2}(\lambda-1)^{-1}(I + H_{\mathbb{R}})$$

түрінде өрнектеледі.

Айталық, $1 < p < \infty$ және $1 \le q < \infty$ болсын. Онда 2.3.2 - теорема бойынша $H_{\mathbb{R}} : L_{p,q}(\mathbb{R}) \to L_{p,q}(\mathbb{R})$ Гильберт түрлендіруінің спектрі $\{-1,1\} \subset \sigma_p(H_{\mathbb{R}})$ болады. Сонымен бірге

$$L_{p,q}(\mathbb{R}) \subset L_{p,\infty}(\mathbb{R}).$$

Сондықтан $L_{p,q}(\mathbb{R})$ кеңістігіндегі $H_{\mathbb{R}}$ операторының 1 және -1 меншікті мәндеріне сәйкес келетін меншікті функциялары $L_{p,\infty}(\mathbb{R})$ кеңістігінде де жатады. Ал, $H_{\mathbb{R}} : L_{p,q}(\mathbb{R}) \to L_{p,q}(\mathbb{R})$ және $H_{\mathbb{R}} : L_{p,\infty}(\mathbb{R}) \to L_{p,\infty}(\mathbb{R})$ операторларының бұл

функциялардағы әсері бірдей болғандықтан $H_{\mathbb{R}} : L_{p,\infty}(\mathbb{R}) \to L_{p,\infty}(\mathbb{R})$ операторы үшін де 1 және -1 нүктелері спектрде жатады,

$$\{-1,1\} \subset \sigma_p(H_{\mathbb{R}}).$$

Олай болса, біз алған нәтижелер бойынша

$$\{-1,1\} \subset \sigma_p(H_{\mathbb{R}}) \subset \sigma(H_{\mathbb{R}}) \subset \{-1,1\}$$

болады. Яғни, келесі теңдік орындалады

$$\sigma(H_{\mathbb{R}}) = \sigma_p(H_{\mathbb{R}}) = \{-1,1\}.$$

Тұжырым толық дәлелденді.
Келесі теоремада біз Орилч кеңістігіндегі Гильберт түрлендіруінің спектрін сипаттаймыз. Бұл нәтиже [3] жұмыста алынған.
2.3.4 – теорема Айталық, $L_{\Phi}(\mathbb{R})$— рефлексивті Орлич кеңістігі болсын. Онда $L_{\Phi}(\mathbb{R})$кеңістігінде анықталған Гильберт түрлендіруінің спектрі

$$\sigma(H_{\mathbb{R}}) = \{-1, 1\}$$

түрінде болады.
Дәлелдеуі. $L_{\Phi}(\mathbb{R})$рефлексивті болғандықтан, ол сепарабельді Банах функциялар кеңістігі болып табылады. Сондықтан $L_2(\mathbb{R}) \cap L_{\Phi}(\mathbb{R})$ жиыны $L_{\Phi}(\mathbb{R})$-де тығыз. $L_2(\mathbb{R})$-де

$$H_{\mathbb{R}}^2 = I$$

теңдігі орындалатындықтан, $H_{\mathbb{R}}$ -дің шенелгендігі мен тығыздық қасиетін пайдаланып, осы теңдікті барлық $f \in L_{\Phi}(\mathbb{R})$ үшін аламыз.
Енді дәлелдеу 2.3.2-теоремадағыдай жүргізіледі. $H_{\mathbb{R}}^2 = I$ болғандықтан, $H_{\mathbb{R}}$ операторының минимал көпмүшесі

$$p(z) = z^2 - 1$$

болады. Сондықтан 1.2.8-тұжырым бойынша

$$\sigma(H_{\mathbb{R}}) = \{-1, 1\}.$$

Теорема дәлелденді.

2.4 Жарты өсте анықталған симметриялық кеңістіктердегі Гильберт түрлендіруінің спектрі

Бұл бөлімшеде жарты өстегі Гильберт түрлендіруінің резольвенттік операторын сипаттаймыз. Көмекші құрал ретінде салмақталған Гильберт түрлендіруін енгіземіз. Сондай-ақ, бұл операторды симметриялық кеңістіктерде шенелгенін зерттейміз. Ол бізге жарты өсте анықталған Гильберт түрлендіруінің спектрін сипаттауда негізгі рөл атқарады. Сонымен қатар, Йоргенстің $L_p(\mathbb{R}_+)$ кеңістіктері үшін пайдаланған идеясына да сүйенеміз [22]. Ал, симметриялық кеңістіктердегі Гильберт түрлендіруінің шенелгендігі Бойдтың [9] еңбегінде жарияланылған.

Жарты өстегі локалды интегралданатын f функциясы үшін Гильберт түрлендіруі

$$(H_{\mathbb{R}_+} f)(x) := \frac{1}{\pi i} p.v. \int_0^\infty \frac{f(y)}{y-x}\, dy, \qquad x > 0,$$

формуласы арқылы анықталады. Сонымен қатар, $\omega \in \mathbb{C}$ үшін салмақталған Гильберт түрлендіруін

$$(H_{\mathbb{R}_+,\omega} f)(x) := \frac{1}{\pi i} p.v. \int_0^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^\omega \frac{f(y)}{y-x}\, dy, \qquad x > 0,$$

түрінде енгіземіз. Әрине, $\omega = 0$ болғанда жағдайда $H_{\mathbb{R}_+,0} = H_{\mathbb{R}_+}$ болады.
Келесі леммада біз салмақталған Гильберт түрлендіруінің шенелгендігін дәлелдейміз.

2.4.1 – лемма Айталық, Бойд индекстері $0 < \alpha_E \le \beta_E < 1$ болатын $E(\mathbb{R}_+)$ симметриялық Банах функциялар кеңістігі берілсін. Егер $\omega \in \mathbb{C}$ саны үшін

$$\beta_E - 1 < \Re\omega < \alpha_E$$

түріндегі теңсіздіктер орындалса, онда салмақталған Гильберт түрлендіруі

$$H_{\mathbb{R}_+,\omega} : E(\mathbb{R}_+) \to E(\mathbb{R}_+)$$

шенелген болады.
Дәлелдеуі: Алдымен $y = tx$ ауыстыруын жасаймыз. Сонда салмақталған Гильберт түрлендіруінін түрлендірсек

$$\left(H_{\mathbb{R}_+,\omega} f\right)(x) = \frac{1}{\pi i} p.v. \int_0^\infty \frac{t^\omega}{t-1} f(tx)dt = \frac{1}{\pi i} p.v. \int_0^\infty \frac{t^\omega}{t-1} D_{\frac{1}{t}} f(x)dt, \quad f \in E(\mathbb{R}_+),$$

түріндегі теңдікті аламыз, мұндағы D_t – созу операторы. Енді ыңғайлық үшін

$$t^{\omega} = 1 + (t^{\omega} - 1)$$

деп жазып, салмақталған Гильберт түрлендіруін

$$H_{\mathbb{R}_+,\omega} = H_{\mathbb{R}_+} + K_{\omega}$$

түріндегі екі оператордың қосындысы ретінде жазамыз, мұндағы

$$(K_{\omega} f)(x) := \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{t^{\omega}-1}{t-1} D_{1/t} f(x)\, dt.$$

Бойд теоремасы [9] бойынша $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$ шартынан Гильберт түрлендіруінің

$$H_{\mathbb{R}_+} : E(\mathbb{R}_+) \to E(\mathbb{R}_+)$$

шенелгендігін аламыз. Сондықтан, бізге салмақталған Гильберт түрлендіруінің шенелгендігін дәлелдеу үшін K_{ω} операторының шенелгендігін дәлелдеу жеткілікті.
Енді біз ыңғайлық үшін

$$\psi_{\omega}(t) := \frac{t^{\omega}-1}{t-1}, \qquad t > 0,\ t \neq 1,$$

деп белгілейік. Бұл функция үшін 1 нүктесі қауіпті болғандықтан, сол нүктеге қатысты шек алайық. Онда ол шек

$$\lim_{t \to 1} \frac{t^{\omega}-1}{t-1} = \omega,$$

түрінде болады. Демек, ω ақырлы десек ψ_{ω} функциясы $t = 1$ нүктесіне үзіліссіз жалғасады. Осыдан, K_{ω} операторы үшін ешқандай ерекше нүкте жоқ екенін көреміз. K_{ω} операторын келесі түрде жазамыз

$$(K_{\omega} f)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \psi_{\omega}(t)\, D_{\frac{1}{t}} f(x)\, dt.$$

Енді бұл теңдіктің екі жағынан да норма алып және $E(\mathbb{R}_+)$ нормасының үшбұрыш теңсіздігін қолдансақ, онда біз

$$\| K_\omega f \|_{E(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |\psi_\omega(t)| \, h_E(\frac{1}{t}) \, dt \, \| f \|_{E(\mathbb{R}_+)}$$

түріндегі теңсіздікті аламыз. Осы теңсіздіктен бізге

$$\int_0^\infty |\psi_\omega(t)| \, h_E(\frac{1}{t}) \, dt < \infty$$

екенін көрсету жеткілікті. Онда [11, Лемма 1] және [10, 216 б.] бойынша әрбір кіші $\varepsilon > 0$ үшін $0 < \delta < 1 < R$ сандары табылып, h_E функциясы үшін

$$h_E(\frac{1}{t}) \leq t^{-\beta_E - \varepsilon}, \qquad 0 < t < \delta,$$

және

$$h_E(\frac{1}{t}) \leq t^{-\alpha_E + \varepsilon}, \qquad t > R$$

түріндегі бағалаулар орындалады. Онда біз, $\varepsilon > 0$ оң санын

$$\beta_E + \varepsilon < 1, \qquad \alpha_E - \varepsilon > 0,$$

және

$$\Re\omega > \beta_E - 1 + \varepsilon, \qquad \Re\omega < \alpha_E - \varepsilon$$

теңсіздіктерін қанағаттардыратындай етіп таңдаймыз.

Енді интегралды зерттеу үшін келесідей үш бөлікке жіктейміз:

$$\int_0^\infty |\psi_\omega(t)| \, h_E(\frac{1}{t}) \, dt = \int_0^\delta |\psi_\omega(t)| \, h_E(\frac{1}{t}) \, dt$$

$$+ \int_\delta^R |\psi_\omega(t)| h_E\left(\frac{1}{t}\right) dt + \int_R^\infty |\psi_\omega(t)| h_E\left(\frac{1}{t}\right) dt =: I_1 + I_2 + I_3,$$

мұндағы δ, R сандары жоғарыдағыдай анықталады.

Бірінші бөлікті зерттейік. Кішентай $0 < t < \delta$ аралық үшін қандайда бір $c > 0$ тұрақтысы бойынша

$$|\psi_\omega(t)| \leq \mathrm{c}(1 + t^{\Re\omega})$$

теңсіздігі орынды. Осы бағалау бойынша келесі интегралдық теңсіздікті аламыз:

$$I_1 \lesssim \int_0^{\delta} t^{-\beta_E-\varepsilon}\,dt + \int_0^{\delta} t^{\Re\omega-\beta_E-\varepsilon}\,dt.$$

Біз таңдаған $\varepsilon > 0$ оң саны бойынша бұл екі интеграл да жинақты екенін көру қиын емес.

Енді екінші бөлікті қарастырайық. $[\delta, R]$ аралығында ψ_ω үзіліссіз және шенелген. Сонда-ақ, h_E функциясы да шенелген. Сондықтан екінші интеграл да ақырлы:

$$I_2 < \infty.$$

Ал, $t > R$ болғанда, $|t-1| \sim t$ деп ұйғарсақ болады. Демек, келесі түрдегі бағалауды аламыз:

$$|\psi_\omega(t)| \lesssim t^{-1} + t^{\Re\omega-1}.$$

Осы бағалауды және h_E функциясына қатысты бағалауларды қолдансақ, онда

$$I_3 \lesssim \int_R^{\infty} t^{-1-\alpha_E+\varepsilon}\,dt + \int_R^{\infty} t^{\Re\omega-1-\alpha_E+\varepsilon}\,dt$$

түріндегі интегралдық бағалауды аламыз. Біз таңдаған $\varepsilon > 0$ оң саны бойынша бұл интегралдар да жинақты. Демек, біз қойған шарт бойынша келесі интеграл ақырлы:

$$\int_0^{\infty} |\psi_\omega(t)| h_E\left(\frac{1}{t}\right) dt < \infty.$$

Сондай-ақ, $K_\omega \in \mathrm{B}(E)$ операторы шенелген. Сондықтан, салмақталған Гильберт түрлендіруі шенелген, яғни

$$H_{\mathbb{R}_+,\omega} = H_{\mathbb{R}_+} + K_\omega \in \mathrm{B}(E).$$

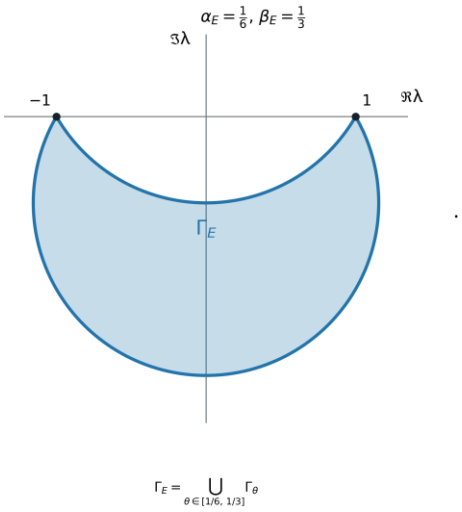
Лемма толық дәлелденді.
Әрбір $0 < \theta < 1$ үшін

$$\Gamma_\theta := \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{\pm 1\} : \frac{1}{2\pi}\arg\frac{\lambda+1}{\lambda-1} = \theta\} \cup \{-1,1\}$$

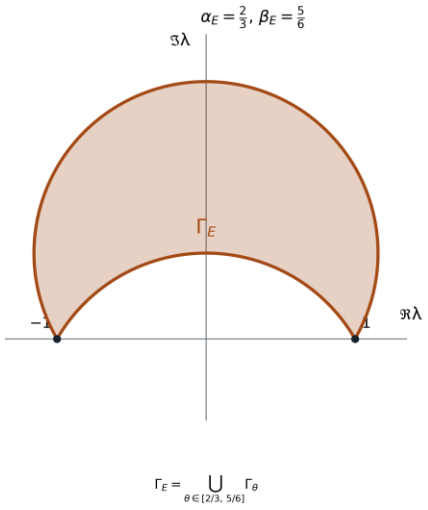
түрінде жиын анықтаймыз. Сондай-ақ, $E(\mathbb{R}_+)$ симметриялық Банах кеңістігіне қатысты, $\alpha_E < \theta < \beta_E$ болатындай Γ_θ жиынының бірігуін

$$\Gamma_E := \bigcup_{\theta\in[\alpha_E,\beta_E]} \Gamma_\theta$$

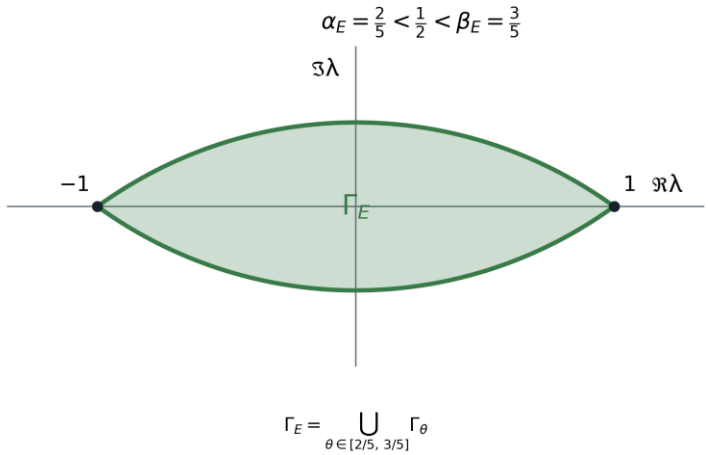
деп белгілейміз. Осы жиынның мысалдарын 2.2-2.4-суреттерден көреміз.



Сурет 2. Γ_E жиынының мысалы.



Сурет 3. Γ_E жиынының мысалы.



Сурет 4. Γ_E жиынының мысалы.

Келесі теоремада жарты өсте анықталған Гильберт түрлендіруінің резольвенттік операторын сипаттаймыз және оның спектрі Γ_E жиынында жататынын көрсетеміз

2.4.2 - теорема Айталық, $E(\mathbb{R}_+)$ — Бойд индекстері $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$ болатын сепарабельді симметриялық Банах функциялар кеңістігі болсын. Онда осы кеңістікте анықталған $H_{\mathbb{R}_+}$ Гильберт түрлендіруі үшін спектр

$$\sigma\left(H_{\mathbb{R}_+}\right) \subseteq \Gamma_E$$

болады. Сондай-ақ, әрбір $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_E$ үшін оның резольвентасы

$$R(\lambda, H_{\mathbb{R}_+}) = (\lambda^2 - 1)^{-1}(\lambda I + H_{\mathbb{R}_+,\omega(\lambda)}),$$

формуласы арқылы беріледі, мұндағы $w(\lambda)$ функциясы

$$w(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\log\frac{\lambda+1}{\lambda-1},$$

түрінде анықталады және $w(\infty) = 0$.
Дәлелдеуі: Айталық, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_E$ болсын және

$$z_\lambda := \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$$

деп белгілейік. Γ_E жиыны -1 және 1 нүктелерін қамтитындықтан, $\lambda \neq \pm 1$, сондықтан $z_\lambda \neq 0$. $\theta \in [0,1)$ санын

$$\theta = \frac{1}{2\pi}\arg z_\lambda \pmod 1$$

теңдігі арқылы анықтайық. $\lambda \notin \Gamma_E$ болғандықтан,

$$\theta \notin [\alpha_E, \beta_E].$$

Осыдан

$$\theta \in [0, \alpha_E) \text{ немесе } \theta \in (\beta_E, 1)$$

екені шығады.
Енді логарифм тармағын келесі түрде таңдаймыз. Егер $\theta \in [0, \alpha_E)$ болса, онда

$$\log z_\lambda = \log|z_\lambda| + 2\pi i\theta$$

деп аламыз. Бұл жағдайда

$$\Re w(\lambda) = \theta,$$

болады. Сондықтан

$$\beta_E - 1 < \Re\, w(\lambda) < \alpha_E$$

теңсіздігі орындалады. Ал, егер $\theta \in (\beta_E, 1)$ болса, онда

$$\log z_\lambda = \log |z_\lambda| + 2\pi i(\theta - 1)$$

тармағын таңдаймыз. Сонда біз келесі теңдікті аламыз

$$\Re\, w(\lambda) = \theta - 1.$$

Сондай-ақ,

$$\beta_E - 1 < \theta - 1 < 0 < \alpha_E.$$

Демек, бұл жағдайда да

$$\beta_E - 1 < \Re\, w(\lambda) < \alpha_E$$

теңсіздігі орындалады. 2.4.1-лемма бойынша

$$H_{\mathbb{R}_+, w(\lambda)} \in B(E).$$

Енді

$$R_\lambda := (\lambda^2 - 1)^{-1}(\lambda I + H_{\mathbb{R}_+, w(\lambda)})$$

деп белгілейміз. Йоргенстің идеясын [22] пайдаланып, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ үшін

$$(\lambda I - H_{\mathbb{R}_+})(\lambda I + H_{\mathbb{R}_+, w})f = (\lambda^2 - 1)f$$

және

$$(\lambda I + H_{\mathbb{R}_+, w})(\lambda I - H_{\mathbb{R}_+})f = (\lambda^2 - 1)f$$

теңбе-теңдіктері орындалады. $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ кеңістігі $E(\mathbb{R}_+)$ кеңістігіне тығыз болғандықтан және барлық қарастырылып отырған операторлар шенелген болғандықтан, бұл теңбе-теңдіктер бүкіл E-ге жалғасады. Сондықтан

$$(\lambda I - H_{\mathbb{R}_+})R_\lambda = I \qquad \text{және} \qquad R_\lambda(\lambda I - H_{\mathbb{R}_+}) = I.$$

Демек,

$$\lambda \in \rho(H_{\mathbb{R}_+}),$$

және

$$R(\lambda, H_{\mathbb{R}_+}) = R_\lambda.$$

Соңғы теңдікті пайдаланып, егер $\lambda \notin \Gamma_E$ болса, онда $\lambda \in \rho(H_{\mathbb{R}_+})$. Сондықтан

$$\sigma(H_{\mathbb{R}_+}) \subset \Gamma_E.$$

Теорема дәлелденді.

3 ЖАЛПЫЛАНҒАН ЧЕЗАРО ОПЕРАТОРЛАРЫНЫҢ СПЕКТРІ

3.1 Жалпыланған Чезаро операторлары және көмекші нәтижелер

Бұл тарау тривиалды емес Бойд индекстері бар симметриялық кеңістіктерде анықталған жалпыланған Чезаро операторларының спектрін зерттеуге арналған. Негізгі мақсат — осы операторлардың $(0,1)$ және $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ аралықтарында анықталған жағдайлардағы спектрін сипаттау, сондай-ақ олардың шенелгендігі мен резольвенталық қасиеттерін талдау. Бұл екі жағдайды жеке қарастыру қажет. Өйткені, аралықтың ақырлы немесе ақырсыздығы оператордың табиғатына, атап айтқанда, оның спектрінің геометриясына және спектрді сипаттау тәсілдеріне елеулі әсер етеді.

3.1.1 – анықтама Айталық, $\beta > 0$ саны және $\Omega \subset \mathbb{R}_+$ өлшемді жиыны берілсін. Онда Ω жиынында өлшемді және локалды интегралданатын f функциясы үшін

$$(C_\beta f)(t) = \frac{\beta}{t^\beta}\int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s)\,ds, \qquad t \in \Omega$$

өрнегі арқылы анықталатын операторды *жалпыланған Чезаро операторы* деп атаймыз. Егер $\Omega = (0,1)$ болса, бұл операторды C_β^1 деп белгілейміз. Ал $\Omega = \mathbb{R}_+$ үшін бұл операторды C_β^∞ деп белгілейміз.

Көріп отырғанымыздай, бұл екі оператордың формулалық анықтамасы бірдей болғанымен, олардың әсер ететін кеңістіктері мен анықталу облыстары әртүрлі. Осы айырмашылық олардың спектрлік қасиеттерінде де көрініс табады.

Сондай-ақ, $\beta = 1$ болған арнайы жағдайда жоғарыдағы операторлар классикалық Чезаро операторымен беттеседі. Сондықтан C_β^1 және C_β^∞ операторларын классикалық Чезаро операторының табиғи жалпылауы ретінде қарастыруға болады. Жалпыланған Чезаро операторлары интегралдық операторлар теориясында, Харди типті теңсіздіктерде, сондай-ақ әртүрлі Банах функциялар кеңістіктеріндегі спектрлік есептерде маңызды орын алады. Әсіресе, олардың қасиеттері кеңістіктің құрылымына тәуелді түрде өзгеретіндіктен, мұндай операторларды Симметриялық кеңістіктерде зерттеу функционалдық талдау тұрғысынан да, операторлар теориясы тұрғысынан да өзекті мәселе болып табылады.

Жалпыланған Чезаро операторы [29] еңбегінде $L_p(\mathbb{R}_+)$ Лебег кеңістіктерінің ішкі кеңістіктері болып табылатын Соболев кеңістіктерінде зерттелген. Аталған жұмыста бұл оператордың шенелгендігі мен спектрлік қасиеттері қарастырылған. Сонымен қатар, жалпыланған Чезаро операторының L_p кеңістіктеріндегі шенелгендігі [20] еңбегіндегі келесі жалпыланған Харди теңсіздігінен шығады:

$$\left(\int_0^\infty \left|\frac{\beta}{t^\beta}\int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s)\,ds\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\frac{1}{p})}{\Gamma(\beta+\frac{1}{p})} \| f \|_{L_p(\mathbb{R}_+)},$$

мұндағы $1< p <\infty$, ал Г — Гамма-функциясы. Бұл теңсіздік аталған операторлардың L_p кеңістіктерінде шенелгендігін ғана емес, сонымен қатар оның нормасын бағалауға мүмкіндік береді.

Жалпыланған Чезаро операторының дискретті аналогы [1] еңбегінде зерттелген. Ал классикалық Чезаро операторының және онымен тығыз байланысты операторлардың әртүрлі Банах функциялар кеңістіктеріндегі шенелгендігі, компакттылығы, спектрі және басқа да қасиеттері [5, 6, 7, 12, 13, 27, 28, 41] жұмыстарында жан-жақты қарастырылған. Алайда, симметриялық кеңістіктерде, әсіресе тривиалды емес Бойд индекстері бар жағдайда, жалпыланған Чезаро операторларының спектрін жүйелі түрде сипаттау мәселесі әлі де өзекті болып отыр.

Осы бөлімде біз дәл осы мәселені қарастырамыз. Нақтырақ айтқанда, тривиалды емес Бойд индекстері бар симметриялық кеңістіктерде әрекет ететін C_β^1 және C_β^∞ операторларының шенелгендігі зерттеліп, олардың спектрі сипатталады. Мұнда алынған нәтижелер классикалық L_p кеңістіктеріндегі белгілі тұжырымдарды анағұрлым жалпы симметриялық кеңістіктерге жалпылауға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, оператор спектрінің кеңістіктің құрылымдық параметрлеріне, атап айтқанда, Бойд индекстеріне тәуелділігі айқындалады.

Тарауда қолданылатын негізгі тәсілдердің бірі — жалпыланған Чезаро операторларын сәйкес операторлық жартытоптар немесе топтар арқылы өрнектеу. Бұл тәсіл Хилле-Филлипс типті функционалдық қисапты қолдануға және оператордың спектрін тиімді сипаттауға мүмкіндік береді. Соның нәтижесінде $(0,1)$ және $\mathbb{R}_+$ жағдайлары үшін жалпыланған Чезаро операторларының спектрлік бейнесі алынады және бұл екі жағдайдың ұқсастықтары мен айырмашылықтары нақты көрсетіледі.

Алдымен кейінгі есептеулерде бірнеше рет қолданылатын қарапайым, бірақ маңызды лемманы келтіреміз.

3.1.2 – л е м м а Айталық, $1< p <\infty$ және $1\le q\le\infty$ болсын. Онда төмендегі тұжырымдар орындалады:

1. кез келген $\gamma\in\mathbb{C}$ үшін

$$t^\gamma \notin L_{p,q}(\mathbb{R}_+);$$

2. егер $a>0$ және $\Re\gamma>\dfrac{1}{p}$ болса, онда

$$(a+t)^{-\gamma}\in L_{p,q}(\mathbb{R}_+);$$

ал. $\Re\gamma\le\dfrac{1}{p}$ болғанда бұл функция $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ кеңістігіне жатпайды;

3.

$$t^{\gamma}\in L_{p,q}(0,1) \quad\Leftrightarrow\quad \Re\gamma>-\frac{1}{p}.$$

Д ә л е д е у і : (1) Алдымен $\mathbb{R}_+$ өсі жағдайын қарастырайық. Әрбір $\gamma\in\mathbb{C}$ үшін

$$|t^{\gamma}|=t^{\Re\gamma}, \qquad t>0.$$

Егер $\Re\gamma\le 0$ болса, онда $t^{\Re\gamma}$ функциясы кемімелі, сондықтан оның өспейтін алмастыру функциясы өзіне тең:

$$(t^{\gamma})^{*}(u)=u^{\Re\gamma}, \qquad u>0.$$

Сонда $1\le q<\infty$ кезінде норма алсақ, келесі теңдікті аламыз

$$\| t^{\gamma}\|^{q}_{L_{p,q}(\mathbb{R}_+)}=\int_0^{\infty}\left(u^{1/p}(t^{\gamma})^{*}(u)\right)^{q}\frac{du}{u}=\int_0^{\infty}u^{q(\Re\gamma+1/p)-1}\,du.$$

Бұл интеграл нөл маңайында да, шексіздікте де бір мезгілде жинақты бола алмайды. Демек,

$$t^{\gamma}\notin L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$$

болады. Егер $q=\infty$ болса, онда

$$\| t^{\gamma}\|_{L_{p,\infty}(\mathbb{R}_+)}=\sup_{u>0}u^{1/p}(t^{\gamma})^{*}(u)=\sup_{u>0}u^{\Re\gamma+1/p}=\infty,$$

өйткені $\Re\gamma+1/p$ кез-келген нақты сан болғанда $u^{\Re\gamma+1/p}$ функциясы $u\to 0+$ немесе $u\to\infty$ кезінде шексіз өседі.

Енді $\Re\gamma > 0$ болсын. Онда $t^{\Re\gamma}$ функциясы өспелі, әрі

$$\mu_{t^\gamma}(\lambda) = m\{t > 0 : t^{\Re\gamma} > \lambda\} = \infty, \qquad \lambda \geq 0.$$

Осыдан барлық $u > 0$ үшін $(t^\gamma)^*(u) = \infty$ екндігін аламыз. Демек, $t^\gamma \notin L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ екенін көреміз.

(ii) Енді $a > 0$ және $t > 0$ үшін $f(t) = (a+t)^{-\gamma}$ функциясын қарастырайық. Оның модулі

$$| f(t) | = (a+t)^{-\Re\gamma}$$

тең болады. Егер $\Re\gamma > 0$ болса, онда $(a+t)^{-\Re\gamma}$ кемімелі функция, сондықтан

$$((a+t)^{-\gamma})^*(u) = (a+u)^{-\Re\gamma}, \qquad u > 0$$

екенін аламыз. Сонда $1 \leq q < \infty$ кезінде келесідей норманы есептейік

$$\| (a+t)^{-\gamma} \|^q_{L_{p,q}(\mathbb{R}_+)} = \int_0^\infty u^{q/p-1}(a+u)^{-q\Re\gamma}\, du.$$

Бұл интегралдың $q/p > 0$ болғандықтан $u \to 0+$ кезіндегі жинақтылығы айқын. Ал $u \to \infty$ кезінде

$$u^{q/p-1}(a+u)^{-q\Re\gamma} \asymp u^{q/p-1-q\Re\gamma},$$

сондықтан интегралдың шексіздіктегі жинақтылығы

$$q/p - 1 - q\Re\gamma < -1 \quad \Leftrightarrow \quad \Re\gamma > \frac{1}{p}$$

шартына пара-пар. Демек,

$$(a+t)^{-\gamma} \in L_{p,q}(\mathbb{R}_+) \quad \Leftrightarrow \quad \Re\gamma > \frac{1}{p}$$

барлық $1 \leq q < \infty$ үшін орындалады.

Енді $q = \infty$ жағдайында келесі шаманы аламыз

$$\| (a+t)^{-\gamma} \|_{L_{p,\infty}(\mathbb{R}_+)} = \sup_{u>0} u^{1/p}(a+u)^{-\Re\gamma}.$$

Бұл шама $\Re\gamma \geq 1/p$ теңсіздік орындалған кезінде ғана ақырлы. Алайда $\Re\gamma \geq 1/p$ болғанда функция $u \to \infty$ кезінде нөлге ұмтылмайды, сондықтан кейінгі спектрлік дәлелдеулерде біз қауіпсіз түрде

$$\Re\gamma > \frac{1}{p}$$

шартын қолданамыз.

Егер $\Re\gamma \leq 0$ болса, онда $(a+t)^{-\Re\gamma}$ өспелі функция, ал оның үлестірім функциясы шексіздікке тең болады. Сондықтан бұл жағдайда да

$$(a+t)^{-\gamma} \notin L_{p,q}(\mathbb{R}_+).$$

(iii) Енді $(0,1)$ аралығындағы жағдайды қарастырайық. Алдымен $\Re\gamma \leq 0$ болсын. Онда $t^{\Re\gamma}$ кемімелі, сондықтан

$$(t^{\gamma})^{*}(u) = u^{\Re\gamma}, \qquad 0<u<1$$

теңдігі орынды. Сонда $1 \leq q < \infty$ кезінде келесідей норма аламыз

$$\| t^{\gamma} \|^{q}_{L_{p,q}(0,1)} = \int_0^1 u^{q(\Re\gamma+1/p)-1}\, du.$$

Бұл интегралдың жинақтылығы

$$q(\Re\gamma+1/p)-1>-1 \quad \Leftrightarrow \quad \Re\gamma > -\frac{1}{p}$$

шартына пара-пар.

Егер $\Re\gamma > 0$ болса, онда $t^{\Re\gamma}$ функциясы $(0,1)$ аралығында өспелі. Бұл жағдайда оның өспейтін алмастыру функциясы

$$(t^{\gamma})^{*}(u) = (1-u)^{\Re\gamma}, \qquad 0<u<1$$

түрінде жазылады. Сондықтан

$$\| t^{\gamma} \|^{q}_{L_{p,q}(0,1)} = \int_0^1 u^{q/p-1}(1-u)^{q\Re\gamma}\, du < \infty .$$

Сол сияқты, $q = \infty$ үшін де

$$\sup_{0<u<1} u^{1/p}(t^{\gamma})^{*}(u) < \infty .$$

Демек,

$$t^{\gamma} \in L_{p,q}(0,1) \quad \Leftrightarrow \quad \Re\gamma > -\frac{1}{p}.$$

Лемма толық дәлелденді.

Енді Лоренц кеңістіктерінде әсер ететін C_0 -топ пен C_0 -жартытоп операторларды қарастырайық. Олар жалпыланған Чезаро операторын интегралдық түрде өрнектеудің негізгі құралы болады. Айталық, $s > 0, t \in \mathbb{R}$ сандары берілсін. Онда $\mathbb{R}_+$ жиынында өлшемді f функциясы үшін

$$(T_p(t) f)(s) := e^{-t/p} f(e^{-t}s)$$

түрінде операторлар жиынын анықтаймыз. Дәл осылай, $0 < s < 1, t \geq 0$ сандары және $(0,1)$ жиынында өлшемді f функциясы үшін

$$(S_p(t) f)(s) := e^{-t/p} f(e^{-t}s)$$

түріндегі операторларды анықтаймыз. Бұл операторлар жиыны сәйкесінше топ және жартытоп болатынын көру қиын емес. Осы операторларға қатысты негізгі нәтижелер келесі теоремада беріледі.

3.1.3 - теорема Айталық, $1 < p < \infty$ және $1 \leq q \leq \infty$ болсын. Жоғарыда анықтаған $\mathcal{T} = \{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ операторлар жиыны $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ кеңістігінде C_0 - топ болады. Сондай-ақ, оның генераторы

$$A_p f(s) = -sf'(s) - \frac{1}{p} f(s)$$

түрдегі өрнекпен анықталады. Ал анықталу облысы

$$D(A_p)=\{f\in L_{p,q}(\mathbb{R}_+): sf'(s)\in L_{p,q}(\mathbb{R}_+)\}$$

түрінде болады.

Сонымен қатар, $\mathcal{S}_p=\{S_p(t)\}_{t\geq 0}$ операторлар жиынын $L_{p,q}(0,1)$ кеңістігінде C_0 - жартытоп болады және оның генераторы

$$B_p f(s)=-sf'(s)-\frac{1}{p}f(s)$$

түрінде анықталады және анықталу облысы

$$D(B_p)=\{f\in L_{p,q}(0,1): sf'(s)\in L_{p,q}(0,1)\}$$

түрінде болады.

Д ә л е л д е у і : Алдымен $\mathcal{T}=\{T_p(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ операторларының изометрия екенін көрсетейік. Өспейтін алмастыру функциясының қасиеті бойынша

$$(T_p(t)f)^*(u)=e^{-t/p}f^*(e^{-t}u),\qquad u>0$$

болады. Бұл теңдік тікелей созу операторының қасиеттерінен шығады.

Сондықтан

$$\| T_p(t)f \|^q_{L_{p,q}(\mathbb{R}_+)}=\int_0^\infty \left(u^{1/p}(T_p(t)f)^*(u)\right)^q\frac{du}{u}$$

$$=\int_0^\infty \left(u^{1/p}e^{-t/p}f^*(e^{-t}u)\right)^q\frac{du}{u}$$

теңдігі орынды. Енді $v=e^{-t}u$ деп алмастыру енгізсек,

$$\| T_p(t)f \|^q_{L_{p,q}(\mathbb{R}_+)}=\int_0^\infty \left((e^tv)^{1/p}e^{-t/p}f^*(v)\right)^q\frac{dv}{v}$$

$$=\int_0^\infty \left(v^{1/p}f^*(v)\right)^q\frac{dv}{v}=\| f \|^q_{L_{p,q}(\mathbb{R}_+)}$$

түріндегі теңдікті аламыз. Демек, $T_p(t)$ — изометрия. $q=\infty$ жағдайында да

$$\| T_p(t) f \|_{L_{p,\infty}(\mathbb{R}_+)} = \sup_{u>0} u^{1/p} (T_p(t) f)^*(u) = \sup_{u>0} u^{1/p} e^{-t/p} f^*(e^{-t}u) = \| f \|_{L_{p,\infty}(\mathbb{R}_+)}.$$

Енді күшті үзіліссіздікті тексерейік. Алдымен $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ болсын. Онда

$$\| T_p(t) f - f \|_\infty = \sup_{x>0} | e^{-t/p} f(e^{-t}x) - f(x) | \to 0 \qquad (t \to 0)$$

болады. Себебі, f бірқалыпты үзіліссіз және ақырлы тұғырлы.
Ал, $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ кеңістігі $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ кеңістігінде тығыз болғандықтан,

$$\lim_{t\to 0} \| T_p(t) f - f \|_{L_{p,q}(\mathbb{R}_+)} = 0, \qquad f \in L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$$

түріндегі шекті аламыз. Демек, $\mathcal{T} = \{T_p(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ операторлар жиыны C_0-топ.

Енді генераторды анықтайық. Егер $f \in D(A_p)$ болса, онда

$$A_p f(s) = \lim_{t\to 0} \frac{T_p(t) f(s) - f(s)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{-t/p} f(e^{-t}s) - f(s)}{t}$$

Демек,

$$A_p f(s) = -s f'(s) - \frac{1}{p} f(s).$$

Анықталу облысыны осы формуладан шығады.

(ii) Енді $\mathcal{S}_p = \{S_p(t)\}_{t\geq 0}$ жиыны үшін дәл жоғарыдайғыдай есептеу жүргіземіз. Айталық, $t \geq 0, 1 < p < \infty$ болсын. Онда өлшемді функция үшін созу операторының қасиеті бойынша

$$(S_p(t) f)^*(u) = e^{-t/p} f^*(e^{-t}u), \qquad 0 < u < 1$$

теңдігін аламыз. Осы бойынша келесі нормаға қатысты есептеу аламыз

$$\| S_p(t) f \|^q_{L_{p,q}(0,1)} = \int_0^1 \left(u^{1/p} (S_p(t) f)^*(u) \right)^q \frac{du}{u}$$

$$= \int_0^1 \left(u^{1/p} e^{-t/p} f^*(e^{-t}u)\right)^q \frac{du}{u}$$

$$= \int_0^{e^{-t}} \left((e^t v)^{1/p} e^{-t/p} f^*(v)\right)^q \frac{dv}{v}$$

$$\le \int_0^1 \left(v^{1/p} f^*(v)\right)^q \frac{dv}{v} = \| f \|^q_{L_{p,q}(0,1)}.$$

Сондай-ақ, $q = \infty$ үшін де

$$\| S_p(t) f \|_{L_{p,\infty}(0,1)} = \sup_{0<u<1} u^{1/p} e^{-t/p} f^*(e^{-t}u) \le \| f \|_{L_{p,\infty}(0,1)}$$

бағалауы орынды. Күшті үзіліссіздік дәл жоғарыдағыдай $C_0^\infty(0,1)$ арқылы тексеріледі. Осылайша, $\mathcal{S}_p$ операторлар жиыны C_0-жартытоп.

Генератор формуласы да тура есептеумен алынады:

$$B_p f(s) = -sf'(s) - \frac{1}{p} f(s)$$

және

$$D(B_p) = \{ f \in L_{p,q}(0,1) : sf'(s) \in L_{p,q}(0,1) \}.$$

Теорема дәлелденді.

Е с к е р т у Эквивалентті Банах нормасы $\| \cdot \|^*_{L_{p,q}}$ үшін де жоғарыдағы операторлар дәл сондай түрде күшті үзіліссіз топ пен жартытоп болады. Себебі олардың f^* және f^{**} функцияларына әсері бірдей созу формуларымен сипатталады. Сондықтан төмендегі спектрлік талдауда бұл норманы кедергісіз қолдануға болады.

Енді A_p және B_p генераторларының спектрін табамыз. Бұл нәтиже кейін жалпыланған Чезаро операторларының спектрін сипаттауда маңызды рөл атқарады.
3 . 1 . 4 – т ұ ж ы р ы м Айталық, $1 < p < \infty$ және $1 \le q \le \infty$ болсын. Онда $A_p : L_{p,q}(\mathbb{R}_+) \to L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ және $B_p : L_{p,q}(0,1) \to L_{p,q}(0,1)$ операторлары үшін

$$\sigma_p(A_p) = \varnothing, \qquad \sigma(A_p) = i\mathbb{R};$$

$$\sigma_p(B_p)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\Re\lambda<0\},\qquad \sigma(B_p)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\Re\lambda\le 0\}.$$

Д ә л е л д е у і : Алдымен A_p операторының нүктелік спектрін қарастырайық. Онда $\lambda\in\mathbb{C}$ үшін

$$A_p f=\lambda f$$

теңдеуі келесі теңдеуге

$$-sf'(s)-\frac{1}{p}f(s)=\lambda f(s)$$

немесе

$$sf'(s)+\left(\lambda+\frac{1}{p}\right)f(s)=0$$

дифференциалдық теңдеуіне пара-пар. Оның нөлден өзге шешімдері

$$f(s)=cs^{-(\lambda+1/p)},\qquad c\neq 0$$

түрінде жазылады. Бірақ 3.1.2 - лемма (i) бойынша мұндай функциялар $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ кеңістігіне жатпайды. Сондықтан нүктелік спектрі бос жиын, яғни

$$\sigma_p(A_p)=\varnothing.$$

Енді жалпы спектрін табайық. Жоғарыдағы 3.1.3 - теорема бойынша әрбір $T_p(t)$ операторының кері операторы бар және изометрия. Сондықтан оның спектрі бірлік шеңбердің ішінде жатады:

$$\sigma(T_p(t))\subset\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}.$$

Онда C_0-топ үшін спектрлік бейнелеу теоремасы [17] бойынша

$$e^{t\sigma(A)}\subset\sigma(T(t)),\qquad t\in\mathbb{R}.$$

Егер $\eta \in \sigma(A)$ болса, онда $e^{t\eta}$ барлық $t \in \mathbb{R}$ үшін бірлік шеңберде жатады. Бұл тек $\Re\eta = 0$ болғанда ғана мүмкін. Демек, келесі қатынас орынды

$$\sigma(A_p) \subset i\mathbb{R}.$$

Енді жалпы спектрін көрсетейік. Енді $\xi \in i\mathbb{R}$ алып, $\xi \in \rho(A)$ деп ұйғарайық. Онда

$$R(\xi, A_p) : L_{p,q}(\mathbb{R}_+) \to L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$$

сызықты шенелген оператор болады. Енді

$$\lambda := \xi + \frac{1}{p}$$

деп белгілеп,

$$f(s) := (1+s)^{-\lambda-1}$$

функциясын алайық. Мұндағы

$$\Re(\lambda+1) = 1 + \frac{1}{p} > \frac{1}{p}$$

болғандықтан, 3.1.2 - лемма (ii) бойынша бұл функция

$$f \in L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$$

класына жатады. Енді

$$g := R(\xi, A) f$$

деп белгілейік. Онда $g \in L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ және

$$(\xi I - A_p)g = f$$

теңдігі орындалады. Яғни,

$$\xi g(s) + sg'(s) + \frac{1}{p} g(s) = f(s).$$

Бұл теңдеуді

$$sg'(s) + \lambda g(s) = f(s)$$

түрінде жазуға болады. Оның жалпы шешімі келесідей болады

$$g(s) = cs^{-\lambda} + \frac{1}{\lambda}(1+s)^{-\lambda}, \qquad c \in \mathbb{C}.$$

Бірақ, $\Re\lambda = 1/p$ болғандықтан, 3.1.2 - лемма (i)–(ii) бойынша $s^{-\lambda}$ функциясы мен $(1+s)^{-\lambda}$ функциясы $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ кеңістігіне жатпайды. Демек, барлық c үшін жоғарыдағы g функциясы $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ кеңістігіне тиесілі бола алмайды. Бұл қайшылықтан

$$\xi \notin \rho(A_p)$$

екені шығады. Сондықтан

$$i\mathbb{R} \subset \sigma(A_p).$$

Осылайша, спектр

$$\sigma(A_p) = i\mathbb{R}$$

екенін көреміз.

(ii) Енді B_p операторының нүктелік спектрін табайық. Онда $f \in D(B_p)$ үшін

$$B_p f = \lambda f$$

теңдеуі

$$sf'(s) + \left(\lambda + \frac{1}{p}\right) f(s) = 0$$

теңдеуіне пара-пар. Оның нөлден өзге шешімдері

$$f(s) = cs^{-(\lambda+1/p)}, \qquad c \neq 0$$

түрінде жазылады. Онда 3.1.2 - лемма (iii) бойынша мұндай функция $L_{p,q}(0,1)$ кеңістігіне тиісті болады сонда тек сонда ғана

$$-\Re\lambda - \frac{1}{p} > -\frac{1}{p}$$

шарты орындалса. Сондықтан нүктелік спектр

$$\sigma_p(B_p) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re\lambda < 0\}$$

түрінде болды. Енді жалпы спектрді анықтайық. $\| S_p(t) \|_{L_{p,q}(0,1)} \leq 1$ болғандықтан C_0-жартытоптың өсу шекарасы үшін

$$\theta_0(\mathcal{S}_p) = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \| S_p(t) \|_{L_{p,q}(0,1)}}{t} \leq 0$$

түріндегі бағалау орынды. C_0-жартытоптар теориясынан белгілі жалпы бағалау бойынша, [17]

$$s(B_p) \leq \theta_0(\mathcal{S}_p) \leq 0.$$

Демек, B_p операторының спектрі үшін келесі қатынас орынды

$$\sigma(B_p) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re\lambda \leq 0\}.$$

Екінші жағынан, біз нүктелік спектр үшін

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \Re\lambda < 0\} \subset \sigma_p(B_p) \subset \sigma(B_p)$$

қатынасын дәлелдедік. Спектр тұйық жиын болғандықтан,

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \Re\lambda \leq 0\} \subset \sigma(B_p)$$

шарты орындалады. Осыдан

$$\sigma(B_p)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\Re\lambda\le 0\}$$

болатынын көреміз. Тұжырым дәлелденді.

Төмендегі нәтиже осы бөлімнің негізгі нәтижесі болып табылады. Ол симметриялық кеңістіктерде анықталған C_β жалпыланған Чезаро операторларының спектрлік қасиеттерін зерттеудегі негізгі құрал болады.

3.1.5 – а н ы қ т а м а Айталық, Бойд индекстері тривалды емес болатын $E(\Omega)$ сепарабельді симметриялық кеңістігі берілсін. Онда $t\in\mathbb{R}_+$, $s\in\mathbb{R}$, $f\in E(0,1)$ және $g\in E(0,\infty)$ үшін $T(t)$ және $S(s)$ операторлары сәйкесінше

$$(T(t)f)(\tau):=\begin{cases}e^{-t}f(e^{-t}\tau), & \tau\in(0,\min\{1,e^t\},\\ 0, & \tau\notin(0,\min\{1,e^t\}\end{cases}$$

$$(S(s)g)(\tau)=e^{-s}g(e^{-s}\tau),\qquad \tau\in(0,\infty)$$

түріндегі өрнектермен анықталады.

Онда әрбір $t\in\mathbb{R}_+$, $s\in\mathbb{R}$ үшін $T(t)$ және $S(s)$ операторлары шенелген және

$$\|T(t)\|_{E(0,1)}\le 1,\qquad \|S(s)\|_{E(0,\infty)}\le\max\{1,e^{-s}\}$$

бағалаулары орындалады. Бұл созу операторының шенелгендігінен шығады. Сонымен қатар,

$$\mathcal{T}=\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+},\qquad \mathcal{S}=\{S(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$$

тиісінше жартытоп пен топ құрайды.

3.1.6 - т е о р е м а Егер $0<\alpha_E\le\beta_E<1$ болса, онда $\mathrm{T}=\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ операторлар жиыны $\mathrm{E}(0,1)$ кеңістігінде C_0 -жартытоп болады. Осы C_0 -жартытоптың генераторы $\mathcal{A}$ келесі формуламен беріледі:

$$\mathcal{A}f(s)=-sf'(s)-f(s).$$

Ал, оның анықталу облысы келесідей түрде беріледі

$$D(\mathcal{A})=\{f\in E(0,1):sf'\in E(0,1)\}.$$

Сондай-ақ, $S = \{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ операторлар жиыны $E(0,\infty)$ кеңістігінде C_0 -топ болады. Оның генераторы $\mathcal{B}$ келесі түрде анықталады:

$$\mathcal{B}f(s) = -sf'(s) - f(s).$$

Ал, анықталу облысы келесідей түрде беріледі

$$D(\mathcal{B}) = \{f \in E(0,\infty): sf' \in E(0,\infty)\}.$$

Д ә л е л д е у і : Алдымен T операторлар жиынының $E(0,1)$ кеңістігінде C_0 - жартытоп болатынын көрсетейік.

Расында, $E(0,1)$ сепарабельді симметриялық кеңістігінде шенелген тұғырлы қарапайым функциялар жиыны тығыз екені белгілі, [34] .

Енді f функциясы

$$f(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k\chi_{A_k}(s),$$

түрінде берілген шенелген тұғырлы қарапайым функция болсын, мұндағы $a_k > 0$ және $A_k \subset (0,1)$ болсын. Кез-келген $t \geq 0$ үшін $T(t)$ операторының әсері

$$(T(t)f)(s) = \sum_{k=1}^{n} e^{-t}a_k\chi_{B_k}(s),$$

түрінде болады, мұндағы

$$B_k = e^t A_k,$$

яғни $s \in B_k$ сонда тек сонда ғана егер $e^{-t}s \in A_k$ болса. Демек, $t \to 0$ болғанда $e^{-t} \to 1$ және $B_k = e^t A_k \to A_k$ болады. Сондықтан

$$(T(t)f)(s) = \sum_{k=1}^{n} e^{-t}a_k\chi_{B_k}(s) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} a_k\chi_{A_k}(s) = f(s).$$

Демек, қарапайым функциялар үшін күшті үзіліссіздік орындалады. Ал мұндай функциялар $E(0,1)$ кеңістігінде тығыз болғандықтан, T шынында да күшті үзіліссіз жартытоп болады.

Енді генераторды анықтайық. $f \in D(\mathcal{A})$ үшін анықтама бойынша

$$\mathcal{A}f(\tau) = \lim_{t\to 0} \frac{(T(t)f)(\tau) - f(\tau)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{-t}f(e^{-t}\tau) - f(\tau)}{t}.$$

Осы өрнекті келесідей екі қосылғышқа жіктейміз:

$$\frac{e^{-t}f(e^{-t}\tau)-f(\tau)}{t} = e^{-t}\frac{f(e^{-t}\tau)-f(\tau)}{t} + \frac{e^{-t}-1}{t}f(\tau).$$

Бірінші қосылғыш үшін

$$\frac{f(e^{-t}\tau)-f(\tau)}{t} = \frac{f(e^{-t}\tau)-f(\tau)}{e^{-t}\tau-\tau}\cdot\frac{e^{-t}\tau-\tau}{t}$$

түрінде түрлендіру енгіземіз. Онда $t \to 0$ кезінде

$$\frac{f(e^{-t}\tau)-f(\tau)}{e^{-t}\tau-\tau} \to f'(\tau), \qquad \frac{e^{-t}\tau-\tau}{t} \to -\tau, \qquad \frac{e^{-t}-1}{t} \to -1$$

түріндегі шектерді аламыз. Осылайша, генератор келесі түрде болады

$$\mathcal{A}f(\tau) = -\tau f'(\tau) - f(\tau).$$

Осыдан анықталу облысы

$$D(\mathcal{A}) = \{f \in E(0,1): \tau f' \in E(0,1)\}$$

түрінде болды.
Дәл осындай тәсілмен S жиынының $E(0,\infty)$ кеңістігінде C_0-топ болатыны және оның генераторы

$$\mathcal{B}f(s) = -sf'(s) - f(s)$$

түрінде берілетіні шығады. Анықталу облысы

$$D(\mathcal{B}) = \{f \in E(0,\infty): sf' \in E(0,\infty)\}$$

екенін аламыз.

3.1.7 - тұжырым Егер $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$ болса, онда

$$\theta_0(\mathrm{T}) = \beta_E - 1, \qquad \theta_0(\mathrm{S}) = \beta_E - 1.$$

Дәлелдеуі: Бұл созу операторының анықтамасынан тікелей шығады. Шынында,

$$(T(t)f)(\tau) = e^{-t}f(e^{-t}\tau),$$

формуласынан $T(t)$ операторы e^{-t} көбейткіші мен созу операторынан тұратынын көреміз. Егер созу операторының нормасын $h_E(\cdot)$ арқылы белгілесек, онда

$$\| T(t) \|_{\mathrm{E}\to\mathrm{E}} = e^{-t}h_E(e^t)$$

теңдігі орынды. Осыдан өсу шекарасының анықтамасы бойыншы келесі шекті аламыз

$$\theta_0(\mathrm{T}) = \lim_{t\to\infty} \frac{\log\|T(t)\|_{\mathrm{E}\to\mathrm{E}}}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log(e^{-t}h_E(e^t))}{t}.$$

Логарифмнің қасиетін пайдаланып,

$$\frac{\log(e^{-t}h_E(e^t))}{t} = \frac{-t+\log h_E(e^t)}{t} = -1 + \frac{\log h_E(e^t)}{t}$$

теңдігін аламыз. Енді $u = e^t$ деп алсақ, онда $t = \log u$ болады, сондықтан келесі теңдік орынды

$$\theta_0(\mathrm{T}) = -1 + \lim_{u\to\infty} \frac{\log h_E(u)}{\log u} = \beta_E - 1.$$

Дәл осындай дәлел $S = \{S(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ тобы үшін де жарамды. Тұжырым дәлелденді.

Келесі тұжырымда біз C_0-жартытоп пен C_0-топ генераторларының спектрін табамыз.

3.1.8 - тұжырым Егер $0 < \alpha_{\mathrm{E}} \le \beta_{\mathrm{E}} < 1$ болса, онда $\mathcal{A}$ операторының спектр

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \Re\lambda \le \beta_E - 1\}$$

түрінде сипатталады және

$$\{\lambda \in \mathbb{C}: \Re\,\lambda < \alpha_E - 1\} \subseteq \sigma_p(\mathcal{A})$$

түріндегі қатынасы орынды.

Сондай-ақ, $\mathcal{B}$ операторының спектрі келесідей сипатталады

$$\sigma(\mathcal{B}) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \alpha_E - 1 \le \Re\,\lambda \le \beta_E - 1\}.$$

Дәлелдеуі: Айталық, $\lambda \in \mathbb{C}$ болсын. Онда

$$\mathcal{A}f = \lambda f$$

теңдеуі келесі дифференциалдық теңдеуге пара-пар:

$$tf'(t) + (\lambda + 1)f(t) = 0.$$

Оны ашып жазсақ,

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{\lambda+1}{t}.$$

қатынасын аламыз. Сонда нөлден өзгеше шешімдер

$$f(t) = ct^{-\lambda-1}, \qquad c \neq 0,$$

түрінде болады.

$L_p(0,1)$ кеңістіктері мен $E(0,1)$ кеңістігі арасындағы енгізулерді пайдаланып,

$$\{\lambda \in \mathbb{C}: \Re\lambda < \alpha_E - 1\} \subseteq \sigma_p(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$$

қатынасын аламыз. Енді $\mathcal{A}$ операторының резольвентасын қарастырайық:

$$R(\lambda, \mathcal{A})f(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(T(t)f)(s)\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t - t} f(e^{-t}s)\, dt.$$

Мұнда $\tau = e^{-t}$ алмастыруын жасаймыз. Онда

$$t = -\log\tau, \qquad dt = -\frac{d\tau}{\tau},$$

$$e^{-\lambda t} = \tau^\lambda, \qquad e^{-t} = \tau.$$

болады. Сондықтан

$$R(\lambda, \mathcal{A})f(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-t} f(e^{-t}s)\, dt$$

$$= \int_1^0 \tau^\lambda \tau f(\tau s)(-\frac{d\tau}{\tau}) = \int_0^1 \tau^\lambda f(\tau s)\, d\tau.$$

теңдігінен [5] бойынша

$$\| R(\lambda, \mathcal{A}) \| \geq \int_0^1 s^{\Re\lambda - \beta_E}\, ds,$$

түріндегі теңсіздікті аламыз. Бұдан

$$\{\lambda \in \mathbb{C}: \Re\lambda \leq \beta_E - 1\} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$$

қатынасы шығады. Екінші жағынан, [17, 1.13 салдар] бойынша

$$-\infty < s(\mathcal{A}) \leq \omega_0(T) = \beta_E - 1.$$

теңсіздігін аламыз. Сондықтан келесі теңдік орынды

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \Re\lambda \leq \beta_E - 1\}.$$

Енді $\mathcal{B}$ операторының спектрін анықтайық. Ол үшін $E(0,\infty)$ кеңістігінде

$$(S_0(s)f)(t) = f(e^{-s}t), \quad s \in \mathbb{R}$$

түріндегі C_0 −топты анықтаймыз. Бұл топтың генераторы $\mathcal{B}_0$ келесі түрде беріледі

$$\mathcal{B}_0 f(t) = -tf'(t),\ D(\mathcal{B}_0) = \{f \in E(0,\infty) : tf' \in E(0,\infty)\}.$$

[7] жұмысында тривиалды емес Бойд индекстері бар симметриялық кеңістікте генератор $\mathcal{B}_0$ спектрі

$$\sigma(\mathcal{B}_0) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \alpha_E \leq \Re\lambda \leq \beta_E\}$$

түрінде екенін көрсеткен. Екінші жағынан, $D(\mathcal{B}_0) = D(\mathcal{B})$ және

$$\mathcal{B}_0 f = \mathcal{B}f + f,\ f \in D(\mathcal{B}),$$

яғни

$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} + I$$

түрінде екенін көреміз. Енді спектрдің ығысу қасиетін қолданамыз. Кез-келген тұйық A операторы және $c \in \mathbb{C}$ саны үшін

$$\sigma(A + cI) = \sigma(A) + c$$

теңдігі орындалады. Сондықтан

$$\sigma(\mathcal{B}_0) = \sigma(\mathcal{B} + I) = \sigma(\mathcal{B}) + 1$$

теңдігі орындалады. Осыдан, $\mathcal{B}$ операторының спектрі

$$\sigma(\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{B}_0) - 1 = \{\lambda \in \mathbb{C}: \alpha_E - 1 \leq \Re\,\lambda \leq \beta_E - 1\}$$

екені шығады. Сонымен,

$$\sigma(B) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \alpha_E - 1 \leq \Re\,\lambda \leq \beta_E - 1\}$$

сипаттамасы шығады. Тұжырым толық дәлелденді.

3.1.9 - лемма Берілген $-\mathcal{A}$ және $-\mathcal{B}$ операторлары $\frac{\pi}{2}$ бұрышты секторлық операторлар болып табылады.

Дәлелдеуі: $-\mathcal{A}$ операторының $\pi/2$ бұрышты секторлық оператор екенін көрсету үшін 1.4.4-тұжырым бойынша

$$(-\infty, 0) \subset \rho(-\mathcal{A})$$

және

$$M(-\mathcal{A}) := \sup_{\lambda>0} \| \lambda(\lambda + (-\mathcal{A}))^{-1} \| < \infty$$

екенін дәлелдеу жеткілікті. $\mathcal{A}$ операторының спектрі туралы жоғарыдағы нәтижеден

$$(-\infty, 0) \subset \rho(-\mathcal{A})$$

екені бірден шығады. Енді $\lambda > 0$ үшін резольвента операторын қарастырайық:

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda - \mathcal{A})^{-1}.$$

Онда

$$R(\lambda, \mathcal{A})f(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(T(t)f)(s)\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-t}f(e^{-t}s)\,dt.$$

Тағы да $\tau = e^{-t}$ алмастыруын қолдансақ,

$$R(\lambda, \mathcal{A})f(s) = \int_0^1 \tau^{\lambda} f(\tau s)\,d\tau.$$

Енді екі жағын λ санына көбейтіп, норма алсақ келесі теңсіздікті аламыз

$$\| \lambda R(\lambda, \mathcal{A}) f \| = \| \lambda(\lambda + (-\mathcal{A}))^{-1} f \| = \left\| \lambda \int_0^1 \tau^{\lambda} f(\tau \cdot)\, d\tau \right\|.$$

Онда [10, Тұжырым 16] бойынша

$$\left\| \lambda \int_0^1 \tau^{\lambda} f(\tau \cdot)\, d\tau \right\| \leq \| f \| \lambda \int_0^1 \tau^{\lambda} \| D_{\tau} \|\, d\tau.$$

Ал созу операторы нормасының қасиеті бойынша (қараңыз: [11, Лемма 3.2]),

$$\| D_{\tau} \| \leq \tau^{-1}, \qquad 0 < \tau < 1.$$

Сондықтан

$$\| f \| \lambda \int_0^1 \tau^{\lambda} \| D_{\tau} \|\, d\tau \leq \| f \| \lambda \int_0^1 \tau^{\lambda} \tau^{-1}\, d\tau$$

$$= \| f \| \lambda \int_0^1 \tau^{\lambda - 1}\, d\tau = \| f \| \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = \| f \|.$$

Демек,

$$M(-\mathcal{A}) = 1.$$

Осыдан

$$-\mathcal{A} \in \mathrm{Sect}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

қорытындысы шығады. $-\mathcal{B}$ операторы үшін де дәл осындай дәлел қолданылады. Лемма дәлелденді.

3.2 Ақырлы аралықта анықталған Лоренц кеңістіктеріндегі жалпыланған Чезаро операторының спектрі

Бұл бөлімде жоғарыда анықталған жалпыланған Чезаро операторының $L_{p,q}$ Лоренц кеңістіктеріндегі шенелгендігі мен спектрі зерттеледі. Сонымен қатар, бұл бөлімде күшті үзіліссіз жартытоптар мен топтар енгізіледі. Мұндай өзгешелік қарастырылатын операторлардың табиғатымен және Лоренц кеңістіктеріндегі арнайы құрылымдық қасиеттермен байланысты.

Атап айтқанда, $L_{p,q}$ Лоренц кеңістіктері жағдайында кейбір дәлелдеулерде осы кеңістікке тән қасиеттер тікелей пайдаланылады. Әсіресе, $1<p<\infty$ және $1\le q\le\infty$ болғанда $L_{p,q}(\Omega)$ кеңістігінде бұрын енгізілген $\|\cdot\|^*_{L_{p,q}}$ эквивалентті нормасын қолдануға болады; осы норма бойынша $L_{p,q}(\Omega)$ Банах кеңістігі болады. Спектрлік ұғымдар эквивалентті норманы ауыстырғанда өзгермейтіндіктен, төмендегі талқылауларда қажет жерде дәл осы норма пайдаланылады.

Бұл бөлімдегі негізгі идея жалпыланған Чезаро операторларын арнайы күшті үзіліссіз C_0 -жартытоптар мен C_0 -топтар арқылы өрнектеуге негізделеді. Осы тәсіл, бір жағынан, операторлардың шенелгендігін дәлелдеуге, екінші жағынан, олардың спектрін тиісті генераторлардың спектрі арқылы сипаттауға мүмкіндік береді.

Осы бөлімде келтірілетін Лоренц кеңістіктеріне қатысты негізгі нәтижелер [40] жұмысында жарияланған.

3.2.1 - теорема Айталық, $\beta>0$, $1<p<\infty$ және $1\le q\le\infty$ болсын. Онда C^1_β операторы $L_{p,q}(0,1)$ кеңістігінде шенелген және әрбір $f\in L_{p,q}(0,1)$ үшін

$$C^1_\beta f(t)=\beta\int_0^\infty(1-e^{-s})^{\beta-1}e^{-s(1-\frac{1}{p})}S_p(s)f(t)ds \qquad (3.2.1)$$

теңдігі орындалады.

Дәлелдеуі: Анықтама бойынша $f\in L_{p,q}(0,1)$ функциясы үшін

$$(C^1_\beta f)(t)=\frac{\beta}{t^\beta}\int_0^t(t-\tau)^{\beta-1}f(\tau)d\tau,\qquad 0<t<1.$$

Жоғарыдағыдай $\tau=te^{-s}$ алмастыруын қолдансақ,

$$(C^1_\beta f)(t)=\frac{\beta}{t^\beta}\int_\infty^0\left(t-te^{-s}\right)^{\beta-1}f(te^{-s})(-te^{-s})ds$$

$$=\beta\int_0^\infty(1-e^{-s})^{\beta-1}e^{-s}f(te^{-s})ds.$$

түріндегі интеградық түрлендіруді аламыз. Ал, операторлар жартытобы

$$(S_p(s)f)(t)=e^{-s/p}f(e^{-s}t)$$

болғандықтан, келесі теңдік орынды

$$e^{-s} f(te^{-s}) = e^{-s(1-\frac{1}{p})} S_p(s) f(t).$$

Демек, осы теңдік арқылы келесі түрлендіруді аламыз

$$C_\beta^1 f(t) = \beta \int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1} e^{-s(1-\frac{1}{p})} S_p(s) f(t) ds,$$

Енді шенелгендікке көшейік. $\mathcal{S}_p = \{S_p(s)\}_{s\geq 0}$ жартытобы $L_{p,q}(0,1)$ кеңістігінде шенелген және келесі теңсіздік орынды

$$\| S_p(s) f \|^*_{L_{p,q}(0,1)} \leq \| f \|^*_{L_{p,q}(0,1)}.$$

Сондықтан

$$\| C_\beta^1 f \|^*_{L_{p,q}(0,1)} \leq \beta \int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1} e^{-s(1-\frac{1}{p})} \| S_p(s) f \|^*_{L_{p,q}(0,1)} ds$$

$$\leq \beta \| f \|^*_{L_{p,q}(0,1)} \int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1} e^{-s(1-\frac{1}{p})} ds$$

$$= \beta B\left(\beta, 1-\frac{1}{p}\right) \| f \|^*_{L_{p,q}(0,1)}.$$

түріндегі бағалау орынды. Осыдан C_β^1 шенелген оператор екені шығады. Теорема дәлелденді.

Енді $(0,1)$ жағдайындағы нүктелік спектр мен толық спектрді анықтаймыз.

3.2.2 - теорема Айталық, $\beta > 0$, $1 < p < \infty$ және $1 \leq q \leq \infty$ болсын. Онда $L_{p,q}(0,1)$ кеңістігіндегі C_β^1 жалпыланған Чезаро операторының нүктелік спектрі келесідей сипатталады

$$\sigma_p(C_\beta^1) = \left\{ \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma\left(\lambda+1-\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\beta+\lambda+1-\frac{1}{p}\right)} : \lambda \in \mathbb{C}_+ \right\}.$$

Сондай-ақ, жалпы спектрі

$$\sigma(C_\beta^1)=\overline{\left\{\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma\left(\lambda+1-\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\beta+\lambda+1-\frac{1}{p}\right)}:\lambda\in\mathbb{C}_+\cup i\mathbb{R}\right\}}.$$

түрінде сипатталады, мұндағы $\mathbb{C}_+=\{z\in\mathbb{C}:\ \Re z>0\}$.

Д ә л е л д е у і : Алдымен нүктелік спектрді сипаттайық. Берілген $\gamma\in\mathbb{C}$ үшін

$$h_\gamma(t):=\frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)},\qquad 0<t<1$$

түрінде функция анықтаймыз. Тікелей есептеу арқылы

$$(C_\beta^1 h_\gamma)(t)=\frac{\beta}{t^\beta}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}\frac{s^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}ds$$

$$=\frac{\beta}{\Gamma(\gamma)t^\beta}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}s^{\gamma-1}ds$$

теңдікті аламыз. Енді $s=tu$ деп алмастырсақ,

$$(C_\beta^1 h_\gamma)(t)=\frac{\beta}{\Gamma(\gamma)t^\beta}\int_0^1(t-tu)^{\beta-1}(tu)^{\gamma-1}t\,du$$

$$=\frac{\beta t^{\beta+\gamma-1-\beta}}{\Gamma(\gamma)}\int_0^1(1-u)^{\beta-1}u^{\gamma-1}du$$

$$=\frac{\beta B(\beta,\gamma)}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}.$$

теңдігін орынды. Бета-функция формуласы бойынша

$$\beta B(\beta,\gamma)=\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)}.$$

Сондықтан

$$(C_\beta^1 h_\gamma)(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} h_\gamma(t)$$

болады. Демек, h_γ функциясы C_β^1 операторының меншікті функциясы.

Енді h_γ функциясының $L_{p,q}(0,1)$ кеңістігіне қашан жататынын анықтайық. 3.1.2 - лемма (iii) бойынша

$$t^{\gamma-1} \in L_{p,q}(0,1) \quad \Leftrightarrow \quad \Re(\gamma-1) > -\frac{1}{p},$$

тұжырымы бар. Яғни,

$$\Re\gamma > 1 - \frac{1}{p},$$

шартын аламыз. Олай болса, γ-ны

$$\gamma = \lambda + 1 - \frac{1}{p}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

түрінде параметрлесек, онда барлық меншікті мәндер

$$\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma\left(\lambda+1-\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\beta+\lambda+1-\frac{1}{p}\right)}$$

түрінде жазылады. Сондықтан нүктелік спектр келесідей болады

$$\sigma_p(C_\beta^1) = \left\{ \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma\left(\lambda+1-\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\beta+\lambda+1-\frac{1}{p}\right)} : \lambda \in \mathbb{C}_+ \right\}$$

Енді жалпы спектрді көрсетейік. 3.2.1 - теорема бойынша жалпыланған Чезаро операторын келесі өрнек түрінде жазамыз

$$C_\beta^1 f = \int_0^\infty g_{\beta,p}(s) S_p(s) f \, ds,$$

мұндағы

$$g_{\beta,p}(s) = \beta(1-e^{-s})^{\beta-1} e^{-s(1-\frac{1}{p})}, \qquad s \geq 0.$$

Бұл функция $\mathbb{R}_+$ үстінде интегралданатындықтан, ол $-B_p$ генераторы үшін Хилле–Филлипс функционалдық қисапта символ қызметін атқарады, [19]. Басқаша айтқанда,

$$C_\beta^1 = \mathcal{L}(g_{\beta,p})(-B_p),$$

мұндағы $\mathcal{L}$ — Лаплас түрлендіруі.

Енді осы Лаплас түрлендіруді есептейік:

$$\mathcal{L}(g_{\beta,p})(z) = \beta \int_0^\infty e^{-zs}(1-e^{-s})^{\beta-1} e^{-s(1-\frac{1}{p})} \, ds$$

$$= \beta \int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1} e^{-s(z+1-\frac{1}{p})} \, ds.$$

Мұнда $u = e^{-s}$ алмастыруын қолдансақ,

$$\mathcal{L}(g_{\beta,p})(z) = \beta \int_0^1 (1-u)^{\beta-1} u^{z+1-\frac{1}{p}-1} \, du = \beta B\left(\beta, z+1-\frac{1}{p}\right).$$

түріндегі теңдікті аламыз. Сондықтан Бета функциясын ашып жазсақ

$$\mathcal{L}(g_{\beta,p})(z) = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma\left(z+1-\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\beta+z+1-\frac{1}{p}\right)}.$$

түріндегі өрнекті аламыз. Ыңғайлық үшін

$$h_{\beta,p}(z) := \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma\left(z+1-\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\beta+z+1-\frac{1}{p}\right)}$$

деп белгілейік. Онда жалпыланған Чезаро операторы келесі түрде жазылады

$$C_\beta^1 = h_{\beta,p}(-B_p).$$

Енді 3.1.4 - тұжырым бойынша

$$\sigma(B_p) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re\lambda \le 0\}$$

болады. Сондықтан $-B_p$ операторынын спектрі келесідей болады

$$\sigma(-B_p) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re\lambda \ge 0\}.$$

Онда $-B_p$ секторлық оператор болғандықтан және $h_{\beta,p}$ функциясы оң жарты жазықтықта голоморфты, ал шекарада үзіліссіз болғандықтан, функционалдық қисап үшін 1.4.9- теоремасын қолдануға болады. Осыдан

$$\sigma(C_\beta^1) = \sigma\left(h_{\beta,p}(-B_p)\right) = \overline{h_{\beta,p}\left(\sigma(-B_p)\right)}$$

түріндегі спектр жиынын аламыз. Яғни, ашып жазсақ

$$\sigma(C_\beta^1) = \overline{\left\{\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma\left(\lambda+1-\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\beta+\lambda+1-\frac{1}{p}\right)} : \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup i\mathbb{R}\right\}}.$$

Теорема толық дәлелденді.
Е с к е р т у Егер $\beta = 1$ болғанда

$$(C_1 f)(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds,$$

түріндегі классикалық Чезаро операторы алынады. Сондықтан жоғарыда алынған нәтижелер классикалық Чезаро операторы үшін Лоренц кеңістіктеріндегі спектрлік сипаттауларды да қамтиды [41].

3.3 Жарты өсте анықталған Лоренц кеңістіктеріндегі жалпыланған Чезаро операторының спектрі

Енді жалпыланған Чезаро операторының жарты өстегі жағдайын қарастырамыз. Мақсатымыз — алдымен операторды C_0-топ арқылы интегралдық түрде көрсету, содан кейін осы көрсетілімнің көмегімен оның спектрін табу.

3.3.1 - теорема Айталық, $\beta > 0$, $1 < p < \infty$ және $1 \le q \le \infty$ болсын. Онда C_β^∞ операторы $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ кеңістігінде шенелген және кез-келген $f \in L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ үшін

$$C_\beta^\infty f(t) = \beta \int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1} e^{-s(1-\frac{1}{p})} T_p(s) f(t)\, ds \qquad (3.3.1)$$

теңдігі орындалады.

Дәлелдеуі: Анықтама бойынша

$$(C_\beta^\infty f)(t) = \frac{\beta}{t^\beta} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\, d\tau .$$

Енді $\tau = te^{-s}$ деп алмастыру енгіземіз. Онда

$$d\tau = -te^{-s}\, ds, \qquad t - \tau = t(1-e^{-s})$$

және $\tau : 0 \to t$ кезінде $s : \infty \to 0$ өзгереді. Сондықтан

$$(C_\beta^\infty f)(t) = \frac{\beta}{t^\beta} \int_\infty^0 \left(t - te^{-s}\right)^{\beta-1} f(te^{-s})(-te^{-s})\, ds$$

$$= \beta \int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1} e^{-s} f(te^{-s})\, ds .$$

түріндегі теңдік орынды. Ал,

$$(T_p(s) f)(t) = e^{-s/p} f(e^{-s}t)$$

екенін ескерсек, келесі теңдікті аламыз

$$e^{-s} f(te^{-s}) = e^{-s(1-1/p)} T_p(s) f(t).$$

Осылайша, жалпыланған Чезаро операторын келесі түрде жазамыз

$$C_\beta^\infty f(t) = \beta \int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1} e^{-s(1-\frac{1}{p})} T_p(s) f(t) ds.$$

Енді шенелгендігін көрсетейік. Жоғарыда ескертілгендей, $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ кеңістігінде эквивалентті Банах нормасы $\|\cdot\|_{L_{p,q}}^*$ қолданылады. Осы нормаға қатысты $\{T_p(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ операторлар изометрия тобы болғандықтан,

$$\| T_p(s) f \|_{L_{p,q}(\mathbb{R}_+)}^* = \| f \|_{L_{p,q}(\mathbb{R}_+)}^*$$

түріндегі теңдік кез-келген $s \in \mathbb{R}$ үшін орынды. Сондықтан Бохнер интегралы үшін Минковский теңсіздігін пайдаланып,

$$\| C_\beta^\infty f \|_{L_{p,q}(\mathbb{R}_+)}^* \le \beta \int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1} e^{-s(1-\frac{1}{p})} \| T_p(s) f \|_{L_{p,q}(\mathbb{R}_+)}^* ds$$

$$= \beta \| f \|_{L_{p,q}(\mathbb{R}_+)}^* \int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1} e^{-s(1-\frac{1}{p})} ds$$

теңсіздігін аламыз. Енді $u = e^{-s}$ деп алмастыру енгізсек, онда

$$\int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1} e^{-s(1-\frac{1}{p})} ds = \int_0^1 (1-u)^{\beta-1} u^{-\frac{1}{p}} du = B\left(\beta, 1-\frac{1}{p}\right)$$

түрдегі теңдікті аламыз, мұндағы B функциясы — Бета-функция. Сондықтан нормалық бағалау

$$\| C_\beta^\infty f \|_{L_{p,q}(\mathbb{R}_+)}^* \le \beta B\left(\beta, 1-\frac{1}{p}\right) \| f \|_{L_{p,q}(\mathbb{R}_+)}^*$$

түрінде болады. Демек, C_β^∞ операторы шенелген оператор. Эквиваленттілік себепті дәл осы қорытынды $\|\cdot\|_{L_{p,q}(\mathbb{R}_+)}$ функционалы үшін де орындалады. Теорема дәлелденді.

Келесі теорема осы бөлімшедегі негізгі нәтижелердің бірі болып табылады.

3.3.2 - теорема Айталық, $\beta > 0$, $1 < p < \infty$ және $1 \le q \le \infty$ болсын. Онда $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$ кеңістігіндегі C_β^∞ жалпыланған Чезаро операторының спектрі

$$\sigma(C_\beta^\infty) = \overline{\left\{ \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma\left(1-\frac{1}{p}+it\right)}{\Gamma\left(\beta+1-\frac{1}{p}+it\right)} : t \in \mathbb{R} \right\}}$$

түрінде сипатталады.

Дәлелдеуі: Жоғарыдағы 3.3.1 - теоремасы бойынша

$$C_\beta^\infty f = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\beta,p}(s) T_p(s) f \, ds$$

түрінде болады, мұндағы

$$g_{\beta,p}(s) = \chi_{[0,\infty)}(s)\beta(1-e^{-s})^{\beta-1} e^{-s(1-\frac{1}{p})}.$$

Бұл функция толық өсте интегралданады. Шынында да, $s \to 0+$ кезінде

$$g_{\beta,p}(s) \asymp s^{\beta-1},$$

ал $\beta > 0$ болғандықтан бұл нөл маңында жинаққталады. Сонымен қатар, $s \to \infty$ кезінде

$$g_{\beta,p}(s) \asymp e^{-s(1-\frac{1}{p})},$$

болады, ал, $1-\frac{1}{p} > 0$ болғандықтан, ол функция шексіздікте де жинақталады.

Бұдан әрі $\{T_p(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ изометриялар тобы болғандықтан, оған сәйкес салмақ функциясын

$$\omega(s) \equiv 1, \qquad s \in \mathbb{R}$$

деп алуға болады. Бұл салмақ квазианалитикалық емес, ал $g_{\beta,p} \in L^1_\omega(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R})$. Сондықтан бір параметрлі топтар үшін [35, 3.1 – теорем] спектрлік бейнелеу теоремасын қолдануға болады. Осы теорема бойынша келесі теңдік орындалады

$$\sigma(C^\infty_\beta) = \overline{\hat{g}_{\beta,p}\left(\sigma(iA_p)\right)}, \qquad (3.3.2)$$

мұндағы $\hat{g}_{\beta,p}$ — $g_{\beta,p}$ функциясының Фурье түрлендіруі. Ал 3.1.4 - тұжырым бойынша

$$\sigma(A_p) = i\mathbb{R}.$$

Сондықтан, $\sigma(iA_p) = \mathbb{R}$ болады. Енді $\tau \in \mathbb{R}$ үшін Фурье түрлендіруін есептейік:

$$\hat{g}_{\beta,p}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau s} g_{\beta,p}(s)\,ds = \beta \int_0^\infty e^{-i\tau s}(1-e^{-s})^{\beta-1} e^{-s(1-\frac{1}{p})}\,ds.$$

Мұнда $u = e^{-s}$ деп алмастыру енгізсек, келесі теңдікті аламыз

$$\hat{g}_{\beta,p}(\tau) = \beta \int_0^1 (1-u)^{\beta-1} u^{1-\frac{1}{p}+i\tau-1}\,du$$

$$= \beta\, B\left(\beta, 1-\frac{1}{p}+i\tau\right).$$

Бұл функция Бета-функция мен Гамма-функция арасындағы стандарт қатынас

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

бойынша

$$\hat{g}_{\beta,p}(\tau) = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma\left(1-\frac{1}{p}+i\tau\right)}{\Gamma\left(\beta+1-\frac{1}{p}+i\tau\right)}$$

түріне келеді. Осыны жоғарыдағы (3.3.2) спектрлік формулаға қойсақ,

$$\sigma(C_\beta^\infty)=\overline{\left\{\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma\left(1-\frac{1}{p}+it\right)}{\Gamma\left(\beta+1-\frac{1}{p}+it\right)}:t\in\mathbb{R}\right\}}.$$

Теорема дәлелденді.

Е с к е р т у $\beta=1$ болғанда C_β^∞ классикалық Чезаро операторы болады. Бұл жағдайда 3.3.2 - теоремасы Лоренц кеңістіктеріндегі классикалық Чезаро операторы үшін белгілі спектрлік сипаттауын береді, [41] қараңыз.

3.4 Ақырлы аралықта анықталған симметриялық кеңістіктердегі жалпыланған Чезаро операторының спектрі

Бұл бөлімде жалпыланған Чезаро операторының Симметриялық кеңістіктердегі шенелгендігі дәлелденіп, оның спектрін сипаттаймыз.

Айталық, $E(0,1)$ — симметиялық кеңістік болсын. Алдыңғы бөлімдерден өзгеше, енді біз жалпыланған Чезаро операторының $E(0,1)$ кеңістігіндегі әрекетін қарастырамыз. Нақтырақ айтқанда, алдымен оның жартытоп арқылы интегралдық көрсетілімін алып, осының көмегімен оператордың шенелгендігін дәлелдейміз. Бұл бөлімнің негізгі нәтижелерінің бірі төмендегі теорема болып табылады.

3 . 4 . 1 - т е о р е м а $\beta>0$ және $0<\alpha_E\le\beta_E<1$ болсын. Онда C_β^1 операторы $E(0,1)$ кеңістігінде шенелген және

$$C_\beta^1 f(t)=\beta\int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1}T(s)f(t)\,ds, \qquad (3.4.1)$$

мұндағы $T=\{T(s)\}_{s\ge0}$ — 3.1.5-анықтамада берілген C_0-жартытоп.

Д ә л е л д е у і : Анықтама бойынша жалпыланған Чезаро операторы келесідей

$$(C_\beta^1 f)(t)=\frac{\beta}{t^\beta}\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}f(\tau)\,d\tau, \qquad t\in(0,1).$$

Мұнда $\tau=te^{-s}$ деп ауыстырайық. Онда

$$d\tau=-te^{-s}\,ds, \qquad t-\tau=t(1-e^{-s}),$$

ал $\tau\colon 0\to t$ болғанда $s\colon\infty\to 0$ өзгереді. Сондықтан

$$(C_\beta^1 f)(t) \quad = \frac{\beta}{t^\beta}\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{\beta}{t^\beta}\int_\infty^0 (t-te^{-s})^{\beta-1} f(te^{-s})(-te^{-s})\, ds$$

$$= \beta \int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1} e^{-s} f(te^{-s}) ds.$$

түріндегі интегалдық түрлендіруді аламыз. Ал жартытоптың берілуі

$$(T(s)f)(t) = e^{-s} f(te^{-s})$$

түрінде. Сондықтан жалпыланған Чезаро операторы келесі түрде болады

$$(C_\beta^1 f)(t) = \beta \int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1} (T(s)f)(t)\, ds.$$

Енді C_β^1 операторының шенелгендігін көрсетейік. Ол үшін $g \in E'(0,1)$ алып,

$$\| g \|_{E'(0,1)} \leq 1$$

деп ұйғарайық. Фубини теоремасы мен Гёльдер теңсіздігін қолдансақ,

$$\int_0^1 |g(u)|\, |(C_\beta^1 f)(u)|\, du \leq \beta \int_0^1 |g(u)| \int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1} |(T(s)f)(u)|\, ds\, du$$

$$= \beta \int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1} \int_0^1 |g(u)|\, |(T(s)f)(u)|\, du\, ds$$

$$\leq \beta \int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1} \| T(s)f \|_{E(0,1)} \| g \|_{E'(0,1)}\, ds$$

$$\leq \beta \int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1} \| T(s) \|_{E\to E}\, ds \cdot \| f \|_{E(0,1)}.$$

Енді $\| g \|_{E'(0,1)} \leq 1$ болатын барлық $g \in E'(0,1)$ бойынша супремум алсақ,

$$\| C_\beta^1 f \|_{E(0,1)} \leq \beta \int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1} \| T(s) \|_{E\to E}\, ds \cdot \| f \|_{E(0,1)}.$$

Енді жартытоптың өсу шекарасы үшін

$$\theta_0(\mathrm{T}) = \beta_E - 1$$

теңдігін қолданамыз. $\beta_E < 1$ болғандықтан,

$$\beta_E + \varepsilon_0 < 1$$

болатындай бір $\varepsilon_0 > 0$ табуға болады. Сондықтан қандай да бір $M > 0$ үшін

$$\| T(s) \|_{E\to E} \leq Me^{-s(1-\beta_E-\varepsilon_0)}, \qquad s \geq 0.$$

Осы бағалауды жоғарыдағы теңсіздікке қойсақ,

$$\| C_\beta^1 f \|_{E(0,1)} \leq M\beta \int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1} e^{-s(1-\beta_E-\varepsilon_0)}\, ds \cdot \| f \|_{E(0,1)}.$$

түріндегі теңсіздікті аламыз. Енді соңғы интегралдың жинақты екенін көрсетейік. Ол үшін

$$x = 1 - e^{-s}$$

деп ауыстыру енгіземіз. Сонда

$$e^{-s} = 1 - x, \qquad ds = \frac{dx}{1-x},$$

болады және

$$\int_0^\infty (1-e^{-s})^{\beta-1} e^{-s(1-\beta_E-\varepsilon_0)}\, ds = \int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{1-\beta_E-\varepsilon_0} \frac{dx}{1-x}$$

$$= \int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{-\beta_E-\varepsilon_0}\, dx$$

$$= B(\beta, 1-\beta_E-\varepsilon_0),$$

түріндегі теңдікті аламыз, мұндағы B — Бета-функция. Мұнда

$$\beta > 0, \qquad 1-\beta_E-\varepsilon_0 > 0.$$

болғандықтан, соңғы интеграл ақырлы болады. Осыдан

$$\| C_\beta^1 f \|_{E(0,1)} \leq M\beta\, B(\beta, 1-\beta_E-\varepsilon_0) \| f \|_{E(0,1)}.$$

Ал, Бета-функция мен Гамма-функция арасындағы

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

теңдігін пайдалансақ, соңғы теңсіздік келесі түрде болады

$$\| C_\beta^1 f \|_{E(0,1)} \leq M\, \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(1-\beta_E-\varepsilon_0)}{\Gamma(\beta+1-\beta_E-\varepsilon_0)} \| f \|_{E(0,1)}.$$

Демек, C_β^1 операторы $E(0,1)$ кеңістігінде шенелген. Теорема дәлелденді.

3.4.2 – теорема Айталық, $\beta > 0$, $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$ болсын және $C_\beta^1 : E(0,1) \to E(0,1)$ жалпыланған Чезаро операторы берілсін. Онда оның спектрі келесідей сипатталады

$$\sigma(C_\beta^1) = \overline{\left\{ \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(z+1-\beta_E)}{\Gamma(\beta+z+1-\beta_E)} : \Re z \geq 0 \right\}}. \qquad (3.4.2)$$

Дәлелдеуі: 3.4.1 - теоремасына сәйкес, C_β^1 жалпыланған Чезаро операторы келесі түрде жазылады

$$C_\beta^1 f = \beta \int_0^\infty (1-e^{-t})^{\beta-1} T(t) f \, dt.$$

Енді осы түрдегі жалпыланған Чезаро операторы үшін Хилле–Филлипс функционалдық есебін қолданамыз. Ол үшін оны келесі түрде жазайық

$$C_\beta^1 f = \int_0^\infty g_\beta(t) T(t) f \, dt,$$

мұндағы

$$g_\beta(t) := \beta(1-e^{-t})^{\beta-1}.$$

Спектрлық бейнелеу теоремасын қолдану үшін осы g_β функциясының Лаплас түрлендіруін енгізейік:

$$\mathcal{L}(g_\beta)(z) := \int_0^\infty g_\beta(t) e^{-tz}\, dt =: h_\beta(z).$$

C_β^1 операторының спектрін зерттеу үшін келесі лемманы дәлелдейміз.

3.4.3 - лемма Айталық, $\beta > 0$ болсын. Онда $h_\beta \in \mathcal{M}[S_{\pi/2}]_{-\mathcal{A}}$.

Дәлелдеуі: Алдымен

$$e(z) := \frac{z}{1+z}$$

функциясын қарастырайық. Енді $e(-\mathcal{A})$ операторының инъективті екенін көрсетеміз. Онда функционалдық қисап бойынша

$$e(-\mathcal{A}) = -\mathcal{A}(1-\mathcal{A})^{-1} = -\mathcal{A}R(1,\mathcal{A}).$$

түріндегі теңдік орынды. Онда $\mathcal{A}$ операторының резольвентаны есептесек

$$(R(1,\mathcal{A})f)(s) = \int_0^\infty e^{-t}(T(t)f)(s)\,dt = \int_0^\infty e^{-2t}f(e^{-t}s)\,dt = \frac{1}{s^2}\int_0^s \tau f(\tau)\,d\tau.$$

түрдегі интегралдық түрлендіруді аламыз. Енді осы өрнекке $-\mathcal{A}$ операторымен әсер етсек,

$$(-\mathcal{A}R(1,\mathcal{A})f)(s) = f(s) - \frac{1}{s^2}\int_0^s \tau f(\tau)\,d\tau$$

түріндегі теңдік орындалады. Осы өрнекті нөлге теңестірсек,

$$f(s) = \frac{1}{s^2}\int_0^s \tau f(\tau)\,d\tau$$

түріндегі интегралдық теңдеуге келеміз. Екі жағын дифференциалдау арқылы бірінші ретті дифференциалдық теңдеу аламыз, онда оның жалпы шешімі

$$f(s) = \frac{c}{s}, \qquad c \in \mathbb{C},$$

түрінде болады. Алайда бұл функция $L_1(0,1)$ кеңістігіне тиесілі емес, сондықтан $f \notin D(\mathcal{A})$. Демек,

$$\ker(e(-\mathcal{A})) = \{0\},$$

яғни $e(-\mathcal{A})$ инъективті.

Белгілі болғандай, $e(z) \in \mathcal{E}(S_{\pi/2})$, дәлірек айтқанда, $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ үшін $e \in \mathcal{E}(S_\varphi)$. Енді $h_\beta \in \mathcal{M}[S_{\pi/2}]_{-A}$ екенін көрсету үшін қандай да бір $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ үшін $eh_\beta \in \mathcal{E}(S_\varphi)$ екенін дәлелдеу жеткілікті. Мұнда

$$(eh_\beta)(z) = \frac{z}{1+z} \cdot \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(z)}{\Gamma(z+\beta)} = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(z+1)}{(1+z)\Gamma(z+\beta)} =: g_\beta(z)$$

деп белгілейік. Бұл g_β функциясы $z = 0$ маңында аналитикалық және

$$g_\beta(0) = \beta.$$

Сонымен қатар, [1] бойынша, $|z| \to \infty$ кезінде

$$h_\beta(z) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{1+z}\, z^{1-\beta}\left[1 + \frac{\beta(1-\beta)}{2z} + O(|z|^{-2})\right] = O(|z|^{-\beta}).$$

$\beta > 0$ болғандықтан, бұдан g_β функциясының шексіздіктегі өсуі көпмүшелік реттен аспайтыны шығады. Енді g_β функциясының

$$\{z \in \mathbb{C}: z \neq 0,\ |\arg z| < \varphi\}$$

жиынында, мұндағы $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, голоморфты екенін көрсетейік.

Белгілі болғандай, Гамма-функция $\Gamma(z)$ комплекс жазықтықта мероморфты және оның жай полюстері

$$\{0, -1, -2, \dots\}$$

нүктелерінде орналасады. Сондықтан $g_\beta(z)$ функциясының голоморфтылығына кедергі тек $\Gamma(z+1)$ және $\Gamma(z+\beta)$ функцияларының полюстерінен туындауы мүмкін. Мұндай ерекше нүктелер тек теріс нақты нүктелерде, яғни

$$z + 1 \in \{0, -1, -2, \dots\} \quad \text{немесе} \quad z + \beta \in \{0, -1, -2, \dots\},$$

болғанда ғана пайда болады. Бірақ $\varphi < \pi$ болғандықтан, бұл нүктелер

$$\{z \in \mathbb{C}: |\arg z| < \varphi\}$$

секторының ішінде жатпайды. Сондықтан олар g_β функциясының осы облыста голоморфтылығына әсер етпейді. Олай болса, $g_\beta \in \mathcal{E}(S_\varphi)$ болады, мұндағы $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Ендеше анықтама бойынша

$$h_\beta \in \mathcal{M}[S_{\pi/2}]_{-\mathcal{A}}$$

екенін көреміз. Лемма толық дәлелденді.

3.4.3-лемма және 1.4.9-теорема бойынша келесідей спектрлік бейнелеу орынды

$$\sigma(C_\beta^1) = \sigma(h_\beta(-\mathcal{A})) = \overline{h_\beta(\sigma(-\mathcal{A}))}.$$

Ал $-\mathcal{A}$ операторының спектрі

$$\sigma(-\mathcal{A}) = \{z \in \mathbb{C}: \Re\, z \geq 1 - \beta_E\}$$

екені белгілі. Сондықтан

$$\sigma(C_\beta^1) = \overline{\left\{\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(z)}{\Gamma(\beta+z)} : \Re\, z \geq 1 - \beta_E\right\}}.$$

Енді $z \mapsto z + 1 - \beta_E$ ауыстыруын жасасақ, спектрді

$$\sigma(C_\beta^1) = \overline{\left\{\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(z+1-\beta_E)}{\Gamma(\beta+z+1-\beta_E)} : \Re\, z \geq 0\right\}}$$

түрінде жазамыз. Теорема дәлелденді.

3.5 Жарты өсте анықталған симметриялық кеңістіктердегі жалпыланған Чезаро операторының спектрі

Келесі нәтиже $E(0,\infty)$ кеңістіктерінде C_β^∞ жалпыланған Чезаро операторының шенелгендігін көрсетеді.

3.5.1 - теорема Айталық, $\beta > 0$ және $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$ болсын. Онда C_β^∞ операторы $E(0,\infty)$ кеңістігінде шенелген және келесі өрнек орындалады

$$C_\beta^\infty f(t) = \beta \int_0^\infty (1 - e^{-s})^{\beta-1} S(s) f(t)\, ds, \qquad (3.5.1)$$

мұндағы $S = \{S(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ — 3.1.5-анықтамада берілген C_0-топ.

Дәлелдеуі: Алдымен $\tau = te^{-s}$ айнымалысын ауыстыру арқылы

$$C_\beta^\infty f(t) = \frac{\beta}{t^\beta} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} f(\tau)\, d\tau$$

$$= \beta \int_0^{\infty} (1 - e^{-s})^{\beta-1} (S(s)f)(t)\, ds$$

теңдігін аламыз.

C_β^∞ операторының шенелгендігі ақырлы аралықтағы жағдайдағыдай дәлелденеді. Шынында, C_β^∞ және C_β^1 операторлары сәйкесінше C_0-топ және C_0-жартытоп арқылы ұқсас түрде беріледі, әрі екеуінің де өсу шекарасы бірдей.

Сондықтан $\beta_E + \varepsilon_0 < 1$ болатындай бір $\varepsilon_0 > 0$ табылады. Осыдан

$$\| S(s) \|_{E \to E} \leq M e^{-s(1-\beta_E-\varepsilon_0)}, \qquad s \geq 0,$$

және алдыңғы бөлімдегідей бағалау арқылы

$$\| C_\beta^\infty f \|_{E(0,\infty)} \leq M \cdot \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(1-\beta_E-\varepsilon_0)}{\Gamma(\beta+1-\beta_E-\varepsilon_0)} \cdot \| f \|_{E(0,\infty)}$$

түріндегі теңсіздік шығады. Демек, C_β^∞ операторы $E(0,\infty)$ кеңістігінде шенелген. Теорема дәлелденді.

3.5.2 - теорема Айталық, $\beta > 0$, $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$ болсын және $C_\beta^\infty : E(0,\infty) \to E(0,\infty)$ жалпыланған Чезаро операторы болсын. Онда

$$\sigma(C_\beta^\infty) = \overline{\left\{ \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(z)}{\Gamma(\beta+z)} : 1 - \beta_E \leq \Re\, z \leq 1 - \alpha_E \right\}}.$$

Дәлелдеуі: $3.1.6 - $ теорема бойынша $S = \{S(s)\}_{s \in \mathbb{R}}$ тобының генераторы $\mathcal{B}$ операторы болады. Онда 3.5.1 - теоремасы бойынша жалпыланған Чезаро операторы

$$C_\beta^\infty f = \beta \int_0^\infty (1 - e^{-t})^{\beta-1} S(t) f\, dt$$

түрінде болады. Осы түрлендіруге сәйкес

$$g_\beta(t) := \beta (1 - e^{-t})^{\beta-1}, \qquad t > 0$$

деп белгілейік. Енді g_β функциясының Лаплас түрлендіруін келесідей қарастырып, оны

$$h_\beta(z) := \mathrm{L}(g_\beta)(z) = \int_0^\infty g_\beta(t) e^{-zt}\, dt, \qquad Re z > 0$$

деп белгілейік. Онда функционалды қисап бойынша

$$C_\beta^\infty = h_\beta(-\mathcal{B})$$

түріндегі теңдікті аламыз. Енді h_β функциясын зерттейік. Алдымен, $x = e^{-t}$ деп ауыстыру енгізсек, онда $dt = -\frac{dx}{x}$, әрі $t: 0 \to \infty$ кезінде $x: 1 \to 0$ болады. Сондықтан осы функция үшін

$$h_\beta(z) = \beta \int_0^\infty (1 - e^{-t})^{\beta-1} e^{-zt}\, dt$$

$$= \beta \int_0^1 (1 - x)^{\beta-1} x^{z-1}\, dx = \beta\, B(z, \beta) = \beta\, \frac{\Gamma(z)\Gamma(\beta)}{\Gamma(z+\beta)}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(z)}{\Gamma(z+\beta)}, \qquad \Re z > 0$$

түріндегі теңдік орынды. Бұл жағдай $(0, 1)$ жағдайындағы дәлелмен толық ұқсас түрде

$$h_\beta \in \mathcal{M}[S_{\pi/2}]_{-\mathcal{B}}$$

екені шығады. Сондықтан Хилле–Филлипс функционалдық есебі үшін спектрлік бейнелеу теоремасын қолдануға болады. Осыдан

$$\sigma(C_\beta^\infty) = \sigma(h_\beta(-\mathcal{B})) = \overline{h_\beta(\sigma(-\mathcal{B}))}.$$

Ал 3.1.8-тұжырым бойынша

$$\sigma(-\mathcal{B}) = \{z \in \mathbb{C}:\ 1 - \beta_E \le \Re\, z \le 1 - \alpha_E\}.$$

Сондықтан жалпыланған Чезаро операторының спектрі келесідей сипатталады.

$$\sigma(C_\beta^\infty) = \overline{\left\{\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(z)}{\Gamma(\beta+z)}:\ 1 - \beta_E \le \Re\, z \le 1 - \alpha_E\right\}}.$$

Осылайша теорема дәлелденді.

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыста симметриялық Банах функциялар кеңістіктерінде, Лоренц және Орлич кеңістіктерінде анықталған Гильберт түрлендіруінің, сондай-ақ симметриялық және Лоренц кеңістіктеріндегі жалпыланған Чезаро операторларының спектрлік қасиеттері зерттелді. Зерттеудің негізгі мақсаты аталған операторлардың спектрін, резольвенталық қасиеттерін және олардың анықталу облысының геометриясымен әрі кеңістіктің құрылымдық сипаттамаларымен, әсіресе Бойд индекстерімен, байланысын сипаттау болды.

Жұмыстың бірінші тарауында кейінгі зерттеулерге қажетті ұғымдар мен нәтижелер жүйеленді. Атап айтқанда, симметриялық функциялар кеңістіктері, Лоренц және Орлич кеңістіктері, Бойд индекстері, шенелген сызықты операторлардың спектрі мен оның жіктелуі, күшті үзіліссіз топтар және жартытоптар, олардың генераторлары, секторлық операторлар және функционалдық қисап қарастырылды. Бұл анықтамалар Гильберт түрлендіруі мен жалпыланған Чезаро операторларының спектрін зерттеудің теориялық негізін құрады.

Екінші тарауда Гильберт түрлендіруінің спектрлік қасиеттері зерттелді. Жарты өсте анықталған симметриялық Банах функциялар кеңістіктері үшін Гильберт түрлендіруінің резольвентасы салмақталған Гильберт түрлендіруі арқылы өрнектеліп, оның спектрі кеңістіктің төменгі және жоғарғы Бойд индекстерімен анықталатын доғалар жиыны арқылы сипатталды. Бұл нәтиже оператор спектрінің кеңістіктің геометриялық параметрлеріне елеулі түрде тәуелді екенін көрсетеді.
Толық және жарты өстерде анықталған Лоренц кеңістіктеріндегі Гильберт түрлендіруі де жеке қарастырылды. Жарты өстегі жағдайда спектр -1 және 1 нүктелерін қосатын шеңбер доғасы түрінде сипатталып, резольвентаның айқын формуласы алынды. Ал толық өсте анықталған Лоренц кеңістіктерінде Гильберт түрлендіруі алгебралық оператор екені көрсетіліп,

$$\sigma(H_{\mathbb{R}}) = \sigma_p(H_{\mathbb{R}}) = \{-1, 1\}$$

теңдігі алынды. Сонымен қатар, рефлексивті Орлич кеңістіктері үшін де Гильберт түрлендіруінің спектрі

$$\sigma(H_{\mathbb{R}}) = \{-1, 1\}$$

екені дәлелденді. Осы нәтижелер толық өстегі Гильберт түрлендіруінің спектрлік сипаты Лоренц және Орлич кеңістіктері үшін бірдей болатынын көрсетеді.

Үшінші тарау жалпыланған Чезаро операторларының спектрін зерттеуге арналды. Алдымен $(0, 1)$ аралығында және $\mathbb{R}_+$ жарты өсінде анықталған жалпыланған Чезаро операторлары сәйкесінше C_0-жартытоптар мен C_0-топтар

арқылы өрнектелді. Осы топтар мен жартытоптардың генераторлары анықталып, олардың спектрлері сипатталды. Генератор спектрі мен Хилле–Филлипс функционалдық қисабын пайдалану жалпыланған Чезаро операторларының спектрін табудың негізгі құралы болды.

Тривиалды емес Бойд индекстері бар симметриялық кеңістіктерде жалпыланған Чезаро операторларының шенелгендігі дәлелденді. $(0,1)$ аралығындағы жағдайда оператор спектрі Гамма-функциялар қатынасы арқылы параметрленетін облыс түрінде, ал $\mathbb{R}_+$ жағдайында бір параметрлі Гамма-функциялар қатынасының бейнесінің тұйықталуы түрінде сипатталды. Бұл екі жағдайды салыстыру спектрдің анықталу облысының шектеулілігіне тәуелді екенін көрсетті.

Лоренц кеңістіктеріндегі жалпыланған Чезаро операторлары үшін де сәйкес C_0 -топтар мен C_0 -жартытоптар құрылып, олардың генераторларының спектрі анықталды. Осы нәтижелердің негізінде $L_{p,q}(0,1)$және $L_{p,q}(\mathbb{R}_+)$кеңістіктеріндегі жалпыланған Чезаро операторларының спектрі Гамма-функциялар қатынастары арқылы нақты сипатталды. Ақырлы аралықта нүктелік спектр де анықталып, меншікті функциялар айқын түрде берілді.

Осылайша, диссертацияның негізгі ғылыми нәтижелерін төмендегідей түйіндеуге болады:

1. Жарты өсте анықталған симметриялық Банах функциялар кеңістіктеріндегі Гильберт түрлендіруінің резольвентасы мен спектрі Бойд индекстері арқылы сипатталды.
2. Толық және жарты өстерде анықталған Лоренц кеңістіктеріндегі Гильберт түрлендіруінің спектрі, нүктелік спектрі және резольвентасы анықталды.
3. Рефлексивті Орлич кеңістіктерінде анықталған Гильберт түрлендіруінің спектрі $\{-1,1\}$ жиынымен сипатталды.
4. Тривиалды емес Бойд индекстері бар симметриялық кеңістіктерде жалпыланған Чезаро операторларының шенелгендігі дәлелденіп, олардың $(0,1)$ және $\mathbb{R}_+$ жағдайларындағы спектрі сипатталды.
5. Лоренц кеңістіктеріндегі жалпыланған Чезаро операторларының спектрі сәйкес топтар мен жартытоптар генераторларының спектрін және функционалдық қисапты пайдалану арқылы анықталды.

Алынған нәтижелер интегралдық және сингулярлы интегралдық операторлардың спектрлік теориясын симметриялық функциялар кеңістіктері жағдайында дамытуға үлес қосады. Жұмыста қолданылған әдістер басқа Харди типті операторлардың, жалпыланған орташалау операторларының және симметриялық кеңістіктерде анықталған сингулярлы интегралдық операторлардың спектрлік қасиеттерін зерттеуде пайдаланылуы мүмкін.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 L. Abadias and P. J. Miana, Generalized Cesàro operators, fractional finite differences and gamma functions, *J. Funct. Anal.* 274 (2018), no. 5, 1424–1465.

2 E. Agora, M. J. Carro, and J. Soria, Boundedness of the Hilbert transform on weighted Lorentz spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 395 (2012), 218–229.

3 M. E. Akhymbek, R. A. Tastankul, and B. O. Ozbekbay, Spectrum of the Hilbert transform on Orlicz spaces over $\mathbb{R}$, *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science* 121 (2024), no. 1, 3–11.

4 M. Akhymbek, K. Tulenov, and B. Ozbekbay, Spectrum of the Hilbert transform on Lorentz spaces $\boldsymbol{L_{p,q}}$, *Complex Var. Elliptic Equ.* 70 (2025), no. 9, 1555–1566.

5 M. Akhymbek, K. Tulenov, and G. Zaur, Spectrum of the Cesàro-Hardy operator in rearrangement invariant spaces, *Quaest. Math.* 47 (2024), no. 6, 1157–1175.

6 A. Arvanitidis and A. Siskakis, Cesàro operators on the Hardy spaces of the half-plane, *Canad. Math. Bull.*, doi:10.4153/CMB-2011-153-7.

7 W. Arendt and B. de Pagter, Spectrum and asymptotics of the Black-Scholes partial differential equation in $(\boldsymbol{L^1}, \boldsymbol{L^\infty})$-interpolation spaces, *Pacific J. Math.* 202 (2002), no. 1, 1–36.

8 C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 129, Academic Press, Boston, 1988.

9 D. W. Boyd, The Hilbert transform on rearrangement-invariant spaces, *Canadian Journal of Mathematics* 19 (1967), 599–616.

10 D. W. Boyd, Spaces between a pair of reflexive Lebesgue spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 18 (1967), 215–219.

11 D. W. Boyd, The spectral radius of averaging operators, *Pacific Journal of Mathematics* 24 (1968), 19–28.

12 D. W. Boyd, Spectrum of Cesàro operator, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 29 (1968), 31–34.

13 A. Brown, P. R. Halmos, and A. L. Shields, Cesàro operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 26 (1965), 125–137.

14 G. P. Curbera, S. Okada, and W. J. Ricker, Inversion and extension of the finite Hilbert transform on $(-1,1)$, *Ann. Mat. Pura Appl.* 198 (2019), 1835–1860.

15 G. P. Curbera, S. Okada, and W. J. Ricker, Fine spectra of the finite Hilbert transform in function spaces, *Adv. Math.* 380 (2021), Article 107597.

16 H. R. Dowson, *Spectral Theory of Linear Operators*, Academic Press, 1978.

17 K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, New York, 2000.

18 C. A. Fernandes, A. Y. Karlovich, and Y. I. Karlovich, Calkin images of Fourier convolution operators with slowly oscillating symbols. In: *Operator Theory: Advances and Applications*. Vol. 282. Springer, Cham, 2021, pp. 193–218.

19 M. Haase, *The Functional Calculus for Sectorial Operators*, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 169, Birkhäuser, Basel, 2006.
20 G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934.
21 R. Hunt, B. Muckenhoupt, and R. Wheeden, Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform, *Trans. Amer. Math. Soc.* 176 (1973), 227–251.
22 K. Jörgens, *Linear Integral Operators*, Pitman, Boston–London–Melbourne, 1982.
23 F. W. King, *Hilbert Transforms*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 124, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
24 V. M. Kokilashvili and M. Krbec, *Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces*, Series on Soviet and East European Mathematics, Vol. 1, World Scientific, Singapore, 1991.
25 S. Krein, Yu. Petunin, and E. Semenov, *Interpolation of Linear Operators*, Nauka, Moscow, 1978. English transl. in Transl. Math. Monogr., Vol. 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982.
26 M. A. Krasnoselskii and Ya. B. Rutitskii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Fizmatgiz, Moscow, 1958.
27 G. Leibowitz, Spectra of finite range Cesàro operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 35 (1973), 27–29.
28 G. Leibowitz, The Cesàro operators and their generalizations: examples in finite dimensional linear analysis, *Amer. Math. Monthly* 80 (1973), 654–661.
29 C. Lizama, P. J. Miana, R. Ponce, and L. Sánchez-Lajusticia, On the boundedness of generalized Cesàro operators on Sobolev spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 419 (2014), no. 1, 373–394.
30 J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II. Function Spaces*. Vol. 97 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]. Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979.
31 S. Petermichl, A sharp bound for weighted Hilbert transform in terms of classical A_p characteristic, *Amer. J. Math.* 129 (2007), 1355–1375.
32 M. M. Rao and Z. D. Ren, *Theory of Orlicz Spaces*, Chapman & Hall Pure and Applied Mathematics, 1991.
33 M. Riesz, Sur les fonctions conjuguées, *Math. Z.* 27 (1927), 218–244.
34 B. Z. A. Rubshtein, G. Y. Grabarnik, M. A. Muratov, et al., *Foundations of Symmetric Spaces of Measurable Functions*. Development in Mathematics, Vol. 45. Springer, Cham, 2016.
35 H. Seferoğlu, A spectral mapping theorem for representations of one-parameter groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 134 (2006), no. 8, 2457–2463.
36 E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, 1970.
37 E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, 1948.

38 F. G. Tricomi, *Integral Equations*, Interscience Publishers, New York, 1957.
39 H. Widom, Singular integral equations in L_p, *Trans. Amer. Math. Soc.* 97 (1960), no. 1, 131–160.
40 B. Ozbekbay and K. Tulenov, Spectrum of generalized Cesaro operator on the Lorentz spaces, *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science* 125 (2025), no. 1.
41 K. S. Tulenov and G. T. Zaur, Spectrum of the Cesàro-Hardy operator in Lorentz $L_{p,q}(0,1)$ spaces, *J. Math., Mech. Comput. Sci.* 117 (2023), 42–49.
42 G. P. Curbera, S. Okada, and W. J. Ricker, Extension and integral representation of the finite Hilbert transform in rearrangement invariant spaces, Quaest. Math. 43 (2020), no. 5–6, 783–812.
43 G. P. Curbera, S. Okada, and W. J. Ricker, Non-extendability of the finite Hilbert transform, Monatsh. Math. 195 (2021), 649–657.
44 G. P. Curbera, S. Okada, and W. J. Ricker, The finite Hilbert transform acting in the Zygmund space (L\log L), Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 25 (2024), 1527–1557.
45 G. P. Curbera, S. Okada, and W. J. Ricker, Measure theoretic aspects of the finite Hilbert transform, Math. Nachr. 297 (2024), 3927–3942.
46 R. O'Neil and G. Weiss, The Hilbert transform and rearrangement of functions, Studia Math. 23 (1963), 189–198.
47 D. E. Edmunds, Z. Mihula, V. Musil, and L. Pick, Boundedness of classical operators on rearrangement-invariant spaces, J. Funct. Anal. 278 (2020), no. 4.
48 F. Sukochev, K. Tulenov, and D. Zanin, The optimal range of the Calderón operator and its applications, J. Funct. Anal. 277 (2019), no. 10, 3513–3559.
49 F. Sukochev, K. Tulenov, and D. Zanin, The boundedness of the Hilbert transformation from one rearrangement invariant Banach space into another and applications, Bull. Sci. Math. 167 (2021), Article 102943
50 K. S. Tulenov, Optimal rearrangement-invariant Banach function range for the Hilbert transform, Eurasian Math. J. 12 (2021), no. 2, 90–103.
51 E. Agora, M. J. Carro, and J. Soria, Characterization of the weak-type boundedness of the Hilbert transform on weighted Lorentz spaces, J. Fourier Anal. Appl. 19 (2013), 712–730.
52 E. Agora, J. Antezana, M. J. Carro, and J. Soria, Lorentz–Shimogaki and Boyd theorems for weighted Lorentz spaces, J. Lond. Math. Soc. 89 (2014), no. 2, 321–336..
53 K. F. Andersen, On an inequality for the Hilbert transform, J. Lond. Math. Soc. (2) 16 (1977), no. 2, 290–296.
54 F. Fehér, D. Gaşpar, and H. Johnen, Normkonvergenz von Fourierreihen in rearrangement invarianten Banachräumen, J. Funct. Anal. 13 (1973), no. 4, 417–434.
55 F. Fehér, D. Gaşpar, and H. Johnen, Der Konjugiertenoperator auf rearrangement-

invarianten Funktionenräumen, Math. Z. 134 (1973), 129–142.
56 R. Ryan, Conjugate functions in Orlicz spaces, Pacific J. Math. 13 (1963), 1371–1377.
57 M. Akhymbek, K. Tulenov, and G. Zaur, Corrigendum to “Spectrum of the Cesàro-Hardy operator in rearrangement invariant spaces”, Quaest. Math. 48 (2025), no. 3, 541–543.
58 A. A. Albanese, J. Bonet, and W. J. Ricker, On the continuous Cesàro operator in certain function spaces, Positivity 19 (2015), 659–679.
59 A. A. Albanese, J. Bonet, and W. J. Ricker, Dynamics and spectrum of the Cesàro operator on (C^\infty(\mathbb R_+)), Monatsh. Math. 181 (2016), 267–283.
60 A. G. Siskakis, Composition semigroups and the Cesàro operator, J. Lond. Math. Soc. (2) 36 (1987), 153–164.
61 I. Al Alam, L. Gaillard, G. Habib, P. Lefèvre, and F. Maalouf, Essential norm of Cesàro operators on (L^p) and Cesàro spaces, J. Math. Anal. Appl. 467 (2018), no. 2, 1038–1065.
62 O. Delgado and J. Soria, Optimal domain for the Hardy operator, J. Funct. Anal. 244 (2007), no. 1, 119–133. doi: 10.1016/j.jfa.2006.12.011.
63 J. Soria and P. Tradacete, Optimal rearrangement invariant range for Hardy-type operators, Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A 146 (2016), no. 4, 865–893.
64 S. J. Montgomery-Smith, The Hardy operator and Boyd indices, in: Interaction Between Functional Analysis, Harmonic Analysis, and Probability (Columbia, MO, 1994), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 175, Marcel Dekker, New York, 1996, pp. 359–364.
65 S. Boza and J. Soria, Solution to a conjecture on the norm of the Hardy operator minus the identity, J. Funct. Anal. 260 (2011), 1020–1028.
66 S. Boza and J. Soria, Norm estimates for the Hardy operator in terms of (B_p) weights, Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017), no. 6, 2455–2465.
67 S. Boza and J. Soria, Averaging operators on decreasing or positive functions: Equivalence and optimal bounds, J. Approx. Theory 237 (2019), 135–152.
68 S. Boza and J. Soria, Weak-type and end-point norm estimates for Hardy operators, Ann. Mat. Pura Appl. 199 (2020), 2381–2393.
69 V. I. Kolyada, On the optimal relationships between (L^p)-norms for the Hardy operator and its dual for decreasing functions, J. Approx. Theory 252 (2020), Article 105362.
70 S. Barza, B. M. Demissie, and J. Soria, Optimal non-absolute domains for the Hardy operator minus identity, J. Math. Anal. Appl. 538 (2024), no. 1, Article 128324.
71 G. P. Curbera and W. J. Ricker, Abstract Cesàro spaces: Integral representations, J. Math. Anal. Appl. 441 (2016), no. 1, 25–44.
72 E. Hille and R. S. Phillips, Functional Analysis and Semi-Groups, revised ed., American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, 1957.
73 R. S. Phillips, Spectral theory of semigroups of linear operators, Trans. Amer.

Math. Soc. 71 (1951), 393–415.
74 A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, Vol. 44, Springer, New York, 1983.
75 K.-J. Engel and R. Nagel, A Short Course on Operator Semigroups, Universitext, Springer, New York, 2006.
76 W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander, Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems, 2nd ed., Birkhäuser, Basel, 2011.
77 L. Gearhart, Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert space, Trans. Amer. Math. Soc. 236 (1978), 385–394.
78 R. Nagel and J. Poland, The critical spectrum of a strongly continuous semigroup, Adv. Math. 152 (2000), no. 1, 120–133.
79 Y. Latushkin and S. Montgomery-Smith, Evolutionary semigroups and Lyapunov theorems in Banach spaces, J. Funct. Anal. 127 (1995), no. 1, 173–197.
80 W. Arendt and C. J. K. Batty, Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups, Trans. Amer. Math. Soc. 306 (1988), 837–852.
81 Y. I. Lyubich and V. Q. Phong, Asymptotic stability of linear differential equations in Banach spaces, Studia Math. 88 (1988), 37–42.
82 V. Q. Phong, Theorems of Katznelson–Tzafriri type for semigroups of operators, J. Funct. Anal. 103 (1992), 74–84.
83 C. J. K. Batty and T. Duyckaerts, Non-uniform stability for bounded semigroups on Banach spaces, J. Evol. Equ. 8 (2008), 765–780.
84 A. Borichev and Y. Tomilov, Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups, Math. Ann. 347 (2010), 455–478.
85 A. Bátkai, K.-J. Engel, J. Prüss, and R. Schnaubelt, Polynomial stability of operator semigroups, Math. Nachr. 279 (2006), 1425–1440.
86 M. Cowling, I. Doust, A. McIntosh, and A. Yagi, Banach space operators with a bounded (H^\infty) functional calculus, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 60 (1996), no. 1, 51–89.
87 P. Vitse, A Besov class functional calculus for bounded holomorphic semigroups, J. Funct. Anal. 228 (2005), no. 2, 245–269.
88 M. Haase, Functional calculus for groups and applications to evolution equations, J. Evol. Equ. 7 (2007), 529–554.
89 M. Haase, A transference principle for general groups and functional calculus on UMD spaces, Math. Ann. 345 (2009), 245–265.
90 B. Baeumer, M. Haase, and M. Kovács, Unbounded functional calculus for bounded groups with applications, J. Evol. Equ. 9 (2009), 171–195.
91 M. Haase and J. Rozendaal, Functional calculus for semigroups via transference, J. Funct. Anal. 265 (2013), 3345–3368.
92 C. J. K. Batty, M. Haase, and J. Mubeen, The holomorphic functional calculus approach to operator semigroups, Acta Sci. Math. (Szeged) 79 (2013), no. 1–2, 289–323.
93 C. J. K. Batty, A. Gomilko, and Y. Tomilov, Resolvent representations for functions

of sectorial operators, Adv. Math. 308 (2017), 896–940.
94 C. J. K. Batty, A. Gomilko, and Y. Tomilov, A Besov algebra calculus for generators of operator semigroups and related norm-estimates, Math. Ann. 379 (2021), 23–93.
95 C. J. K. Batty, A. Gomilko, and Y. Tomilov, The theory of Besov functional calculus: Developments and applications to semigroups, J. Funct. Anal. 281 (2021), no. 6, Article 109089.
96 C. J. K. Batty, A. Gomilko, and Y. Tomilov, Functional calculi for sectorial operators and related function theory, J. Inst. Math. Jussieu 22 (2023), no. 3, 1383–1463.
97 N. J. Kalton and T. Kucherenko, Operators with an absolute functional calculus, Math. Ann. 346 (2010), 259–306.
98 M. Hieber and J. Prüss, Functional calculi for linear operators in vector-valued (L^p)-spaces via the transference principle, Adv. Differential Equations 3 (1998), no. 6, 847–872.
99 A. McIntosh, Operators which have an (H^\infty) functional calculus, in: Miniconference on Operator Theory and Partial Differential Equations (North Ryde, 1986), Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., Vol. 14, Australian National University, Canberra, 1986, pp. 210–231.
100 M. Haase, A characterization of group generators on Hilbert spaces and the (H^\infty)-calculus, Semigroup Forum 66 (2003), no. 2, 288–304.
101 И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
102 S. J. Montgomery-Smith, The Hardy Operator and Boyd Indices, in: Interaction Between Functional Analysis, Harmonic Analysis, and Probability, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 175, Marcel Dekker, New York, 1996, pp. 359–364.
103 M. Valente, *Fredholmness of singular integral operators with continuous coefficients on Banach function spaces over the real line*, Advances in Operator Theory 11 (2026), Article 33.