ОЗБЕКБАЙ БАКЫТЖАН ОРЫНГАЛИУЛЫ

Спектр некоторых сингулярных интегральных операторов в симметрических пространствах

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по образовательной программе 8D05404 – Фундаментальная и прикладная математика

Актуальность исследования. Исследование спектральных свойств интегральных и сингулярных интегральных операторов, определённых в различных пространствах функций, является одним из основных направлений современного функционального анализа и теории операторов. Спектр оператора характеризует существование обратного оператора, аналитическую структуру резольвенты, разрешимость операторных уравнений и возможность применения функционального исчисления. Поэтому определение спектра даёт важную информацию не только об отдельном операторе, но и о геометрических и интерполяционных свойствах пространства, в котором он действует.

Среди сингулярных интегральных операторов преобразование Гильберта является классическим объектом гармонического анализа, анализа Фурье, комплексного анализа и теории сингулярных интегральных уравнений. Хотя его ограниченность и спектр в пространствах Лебега хорошо изучены, при переходе от пространств Лебега к более широким классам функциональных пространств спектральная природа оператора усложняется. В частности, преобразования Гильберта на всей прямой, полуоси и конечном интервале задаются ядрами одного типа, однако их спектры имеют различную геометрическую структуру. Это различие связано с геометрией области определения, свойствами симметричного пространства и его индексами Бойда.

Симметричные пространства объединяют пространства Лебега, Лоренца, Орлича и многие другие классические пространства в рамках единой теоретической схемы. Исследование в таких пространствах не только ограниченности операторов, но и их спектров позволяет обобщать известные результаты с отдельных пространств на целые классы функциональных пространств. Кроме того, нижний и верхний индексы Бойда симметричного пространства описывают асимптотическое поведение операторов растяжения и играют основную роль при оценке резольвент сингулярных интегральных операторов. Поэтому исследование спектра преобразования Гильберта в симметричных пространствах и пространствах Лоренца является одной из актуальных задач современной теории операторов.

Второй рассматриваемый в работе класс операторов составляют обобщённые операторы Чезаро, являющиеся обобщением классического оператора Чезаро. Эти операторы встречаются в теории интегральных операторов,

неравенствах типа Харди, процессах усреднения и теории операторных полугрупп. Несмотря на то что их свойства в пространствах Лебега и некоторых пространствах Соболева известны, спектральные характеристики в пространствах Лоренца и общих симметричных пространствах исследованы не полностью. Представление обобщённых операторов Чезаро посредством специальных сильно непрерывных групп и полугрупп, определение их генераторов и описание спектра с помощью функционального исчисления дают новый и эффективный подход к данной задаче.

Актуальность диссертационной работы определяется исследованием двух важных классов операторов — преобразования Гильберта и обобщённых операторов Чезаро — в симметричных пространствах и пространствах Лоренца. В работе выявляется зависимость спектра от области определения оператора, структуры пространства и индексов Бойда, а также используются взаимосвязи между банаховыми алгебрами, теорией интерполяции, сильно непрерывными группами и полугруппами и функциональным исчислением.

Цель исследования. Исследовать спектральные и резольвентные свойства преобразования Гильберта и обобщённых операторов Чезаро, определённых в симметричных банаховых функциональных пространствах и пространствах Лоренца, и описать их спектры через область определения и структурные параметры пространства.

Задачи исследования. Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи: систематизировать необходимые понятия, относящиеся к симметричным пространствам, пространствам Лоренца, индексам Бойда и спектру оператора; определить спектр и резольвенту преобразования Гильберта на всей прямой и полуоси в пространствах Лоренца; исследовать ограниченность взвешенного преобразования Гильберта на полуоси в симметричных пространствах; получить формулу резольвенты преобразования Гильберта в симметричном пространстве; представить обобщённые операторы Чезаро посредством сильно непрерывных групп и полугрупп; определить спектры соответствующих генераторов; описать спектры обобщённых операторов Чезаро с помощью функционального исчисления и теорем о спектральном отображении.

Объект исследования. Преобразование Гильберта и обобщённые операторы Чезаро, определённые на всей прямой, полуоси и конечном интервале, а также связанные с ними взвешенные сингулярные интегральные операторы, сильно непрерывные группы и полугруппы и их генераторы.

Предмет исследования. Ограниченность, спектр, точечный спектр, резольвентное множество, явные формулы резольвенты указанных операторов в симметричных пространствах и пространствах Лоренца, а также связь спектра с индексами Бойда.

Методы исследования. В работе использованы спектральная теория банаховых алгебр и линейных операторов, теория симметричных пространств, методы субмажорирования, теория интерполяции, оценки операторов растяжения и индексов Бойда, теория сильно непрерывных групп и полугрупп, методы исследования спектров генераторов, функциональное исчисление Хилле–Филлипса и функциональное исчисление для секториальных операторов, теоремы о спектральном отображении, интегральные преобразования, связанные с бета- и гамма-функциями, а также методы аналитического продолжения и сравнения граничных значений резольвенты.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты вносят вклад в развитие спектральной теории интегральных и сингулярных интегральных операторов в симметричных пространствах. Спектральные формулы, полученные в пространствах Лоренца, расширяют классические результаты для пространств Лебега, а описания через индексы Бойда одновременно охватывают широкий класс симметричных пространств. Использованные в работе подходы могут применяться при исследовании других сингулярных интегральных операторов и операторов типа Харди. Результаты могут быть использованы в специальных курсах по функциональному анализу, гармоническому анализу, теории операторов и спектральной теории.

Научная новизна и основные результаты, выносимые на защиту. В диссертационной работе спектральные свойства преобразования Гильберта и обобщённых операторов Чезаро исследованы в пространствах Лоренца и симметричных пространствах на единой методологической основе. Получены следующие результаты:

- установлено алгебраическое свойство преобразования Гильберта на всей прямой в пространствах Лоренца; доказано, что его спектр и точечный спектр совпадают с множеством {-1, 1}, и получена явная формула резольвенты;
- спектр преобразования Гильберта на полуоси в пространствах Лоренца описан в виде дуги окружности, а резольвента выражена через логарифмический параметр и взвешенное преобразование Гильберта;
- получена формула резольвенты преобразования Гильберта на полуоси и установлена связь спектра с областью, определяемой индексами Бойда;
- получены интегральные представления обобщённых операторов Чезаро посредством сильно непрерывных групп и полугрупп, а их ограниченность и спектры в пространствах Лоренца описаны с помощью отношений гамма-функций;
- обобщённые операторы Чезаро в симметричных пространствах с нетривиальными индексами Бойда исследованы с помощью функционального

исчисления; получены формулы их спектров на областях (0,1) и (0,∞), зависящие от нижнего и верхнего индексов Бойда пространства.

Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов. Достоверность результатов обеспечивается применением признанных методов функционального анализа и теории операторов, строгими доказательствами всех основных утверждений, согласованностью полученных формул с известными частными случаями и публикацией результатов в рецензируемых научных изданиях. Полученные для пространств Лоренца результаты при q=p согласуются с известными спектральными описаниями в классических пространствах Лебега, а формулы для симметричных пространств при классических значениях индексов Бойда совпадают с ранее известными результатами.

Апробация. Отдельные результаты диссертационной работы были представлены и обсуждены на традиционных международных математических Апрельских конференциях, посвящённых Дню работников науки (Алматы, 2023–2025), международной конференции EMJ-2025 (Астана, 2025), 15-м Международном конгрессе ISAAC (Астана, 21–25 июля 2025 года), международной конференции «Modern Trends in Fourier Analysis», состоявшейся в Centre de Recerca Matemàtica (Барселона, 2–6 июня 2025 года), а также на научных семинарах Института математики и математического моделирования и Казахского национального университета имени аль-Фараби.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в трёх научных статьях:

1. M. E. Akhymbek, R. A. Tastankul, B. O. Ozbekbay. Spectrum of the Hilbert Transform on Orlicz Spaces over R. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 121 (2024), no. 1, 3–11. DOI: 10.26577/JMMCS202412111. Квартиль:Q4, Процентиль: 18, Индекс цит.: 1.0, SJR: 0.275.

2. M. Akhymbek, K. Tulenov, B. Ozbekbay. Spectrum of the Hilbert Transform on Lorentz Spaces Lp,q. Complex Variables and Elliptic Equations, 70 (2025), no. 9, 1555–1566. DOI: 10.1080/17476933.2024.2413126. Квартиль: Q3, Процентиль: 56, Индекс цит.: 1.9, SJR: 0.493.

3. K. Tulenov, B. Ozbekbay. Spectrum of the Generalized Cesàro Operator on the Lorentz Spaces. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 125 (2025), no. 1, 66–80. DOI: 10.26577/JMMCS2025125106. Квартиль: Q2, Процентиль: 37, Индекс цит.: 1.0, SJR: 0.275.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованных источников.

Содержание диссертации. Во введении обосновывается актуальность темы исследования, формулируются цель и задачи работы, объект и предмет

исследования, применённые методы, научная новизна и теоретическая значимость.

В первой главе систематизируется теоретический аппарат, необходимый для доказательства основных результатов диссертации. Вводятся симметричные банаховы функциональные пространства, функция распределения, невозрастающая перестановка, субмажорирование Харди–Литтлвуда–Пойа, фундаментальная функция, операторы растяжения и индексы Бойда. Пространства Лебега, Лоренца и Орлича рассматриваются как основные примеры симметричных пространств. Кроме того, излагаются понятия банаховых алгебр, алгебраических операторов, минимального многочлена, спектра и резольвенты оператора, точечного, непрерывного и остаточного спектров. В заключительных разделах главы приводятся необходимые результаты о сильно непрерывных группах и полугруппах, их генераторах, границе роста и функциональном исчислении для секториальных операторов.

Вторая глава посвящена спектральным свойствам преобразования Гильберта. В пространствах Лоренца используется алгебраическое тождество, связывающее квадрат преобразования Гильберта на всей прямой с единичным оператором. На полуоси резольвента выражается через параметр $w(\lambda)$, определяемый выбранной ветвью логарифма, и взвешенное преобразование Гильберта. С помощью интерполяционных свойств пространств Лоренца формула резольвенты продолжается, а геометрическое место спектра описывается как дуга окружности, соединяющая точки -1 и 1.

В третьей главе исследуется спектр обобщённых операторов Чезаро. Сначала устанавливаются условия принадлежности степенных функций пространствам Лоренца и доказывается, что специальные операторы растяжения образуют сильно непрерывную группу и полугруппу. Их генераторы записываются в виде дифференциальных выражений, после чего описываются их точечные и полные спектры. Обобщённый оператор Чезаро представляется в виде операторнозначного интеграла по соответствующей группе или полугруппе. Этот метод позволяет доказать ограниченность оператора и описать его спектр как образ спектра генератора при отображении, задаваемом отношением гамма-функций.

В последующей части главы данный подход обобщается на симметричные пространства с нетривиальными индексами Бойда. С помощью норм операторов растяжения исследуются свойства роста сильно непрерывных групп и полугрупп и определяются спектры их генераторов. Обобщённые операторы Чезаро рассматриваются как функции генераторов посредством функционального исчисления Хилле–Филлипса.