14-дәріс. **Дифференциалдық теңдеулер жүйесі**

Дәрістің қысқаша мазмұны:

1. **дифференциалдық теңдеулер жүйесі жайлы ұғым**

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ ..... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases}$$

түріндегі дифференциалдық теңдеулер жүйесі нормаль жүйе деп аталады. Мұндағы x_1, x_2,…, x_n- t айнымалысынан тәуелді белгісіз функциялар

Егер нормаль жүйенің оң жағы x_1, x_2,…, x_n қарағанда сызықты функциялар болса, ондадифференциалдық теңдеулер жүйесі сызықты деп аталады.

Кей жағдайда нормаль жүйені n-ші ретті бір айнымалы функциясы бар бір теңдеуге келтіруге болады.

Мысал 1:

Дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$\dfrac{dx}{dt} = x + y, \qquad \dfrac{dy}{dt} = x - y$ x(0)=2, y(0)=0 бастапқы шарттар берілген.

Шешуі:

Бірінші теңдеуді t бойынша дифференциалдаймыз: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt}$; алынған теңдеуден $\dfrac{dy}{dt}$ және у-ті анықтап, $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2x = 0.$ теңдігін аламыз. $k^2 - 2 = 0$ характеристикалық теңдеуінен $k_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$ түбірлерін табамыз. Осыдан х үшін жалпы шешім

$x = C_1 e^{t\sqrt{2}} + C_2 e^{-t\sqrt{2}}.$

түрінде жазылады.

Бірінші теңдеуден у үшін жалпы шешімді табамыз:

$$y = \frac{dx}{dt} - x = C_1(\sqrt{2}-1)e^{t\sqrt{2}} - C_2(\sqrt{2}+1)e^{-t\sqrt{2}}.$$

Бастапқы шарттарды қолданып, тұрақтыларды табамыз:

$$C_1 + C_2 = 2, \qquad \sqrt{2}(C_1 - C_2) - (C_1 + C_2) = 0.$$

Осыдан $C_1 = (\sqrt{2}+2)/2, \quad C_2 = \left(2-\sqrt{2}\right)/2.$ Дербес шешім келесі түрде болады

$$x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)e^{t\sqrt{2}} + \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-t\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{t\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t\sqrt{2}}.$$

Мысал 2:

x(0)=1, y(0)=2 бастапқы шарттарды қанағаттандыратын

$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{2x+3y}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{2x+3y}$ дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешіңіз.

Шешімі:

Бірінші интегралдық комбинацияны құрамыз. Бірінші теңдеуді екіншіге бөліп

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{y}; \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}; \qquad \ln x = \ln y + \ln C_1, \qquad m.e. \quad x = C_1 y. \text{ аламыз.}$$

Екінші интегралдық комбинацияны құрайық. Екі еселенген бірінші теңдеу мен үш еселенген екінші теңдеуді қосамыз

$$2\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} = 1; \quad 2dx + 3dy = dt, \quad m.e. \quad 2x + 2y = t + C_2.$$

Теңдеулер жүйесінен $x = C_1 y, \quad 2x + 3y = t + C_2$ жалпы шешімін табамыз

$$x = \frac{C_1(t + C_2)}{2C_1 + 3}, \qquad y = \frac{t + C_2}{2C_1 + 3}.$$

Бастапқы шарттарды қолданып,

$$1 = \frac{C_1 C_2}{2C_1 + 3}, \qquad 2 = \frac{C_2}{2C_2 + 3}, \quad m.e. \quad C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = 8. \text{ табамыз.}$$

C_1 және C_2 тұрақтыларын жалпы шешімге қойып, дербес шешімді аламыз:

$$x = \frac{1}{8}t + 1, \quad y = \frac{1}{4}t + 2.$$