5-*дәріс*. Бернулли теңдеуі.

Анықтама.

$$y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^{\alpha}$$

түріндегі дифференциалдық теңдеу Бернулли теңдеуі деп аталады, мұндағы $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, $P(x)$, $Q(x)$ - қандай да бір кесіндіде үзіліссіз функциялар. Бұл теңдеу $u = y^{1-\alpha}$ айнымалысын ауыстыру көмегімен сызықты теңдеуге келтіріледі

Мысал 1. $y' + xy = -x \cdot y^2$ Бернулли теңдеуін сызықты теңдеуге келтір.

Шешуі:

$$\alpha = 2 \Rightarrow u = y^{1-\alpha} = \frac{1}{y} \Rightarrow u' = -\frac{1}{y^2} y' \Rightarrow y' = -y^2 \cdot u' \Rightarrow y' = -\frac{u'}{u^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2} + \frac{x}{u} = -\frac{x}{u^2} \Rightarrow -u' + xu = -x \Rightarrow u' - xu = x .$$

Мысал 2. $y' + 2e^x y = 2e^x \sqrt{y}$ Бернулли теңдеуінің жалпы шешімін тап.

Берілген теңдеудегі $\alpha = \frac{1}{2}$, сондықтан $z = y^{1-\alpha} = \sqrt{y}$ белгілеуін енгіземіз. $z' + e^x z = e^x$ теңдеуін аламыз, бұл сызықты теңдеу және оның жалпы шешімі:

$$z = e^{-\int e^x dx}\left(\int e^x e^{\int e^x dx} dx + C\right) = e^{-e^x}\left(\int e^x e^{e^x} dx + C\right) = e^{-e^x}\left(\int e^{e^x} de^x + C\right) =$$

$$= e^{-e^x}\left(e^{e^x} + C\right) = 1 + Ce^{-e^x} .$$

Онда берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = z^2 = \left(1 + Ce^{-e^x}\right)^2 .$$

Мысал 3. $xy' + y = xy^2 \ln x$ теңдеуінің жалпы шешімін тап.

Берілген теңдеудің екі жағын да $x \neq 0$ айнымалысына бөліп, Бернулли теңдеуін алуға болады, мұндағы $\alpha = 2$. Ал біз бұл теңдеуді Бернулли ауыстыруы әдісімен шығаралық $(y = uv,\ y' = u'v + uv')$:

$$x\left(u'v + uv'\right) + uv = x(uv)^2 \ln x.$$

$xv' + v = 0$ теңдеуінен, $v = x^{-1}$ аламыз. Енді $xvu' = xu^2 v \ln x$ теңдеуінің жалпы шешімін табу қажет, мұндағы $v = x^{-1}$. Онда $u' = u^2 \dfrac{\ln x}{x}$ теңдеуін аламыз. Айнымалыларды ажыратып, интегралдасақ:

$$\frac{du}{u^2} = \ln x \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{du}{u^2} = \int \ln x \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u} = \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{C}{2}, \qquad u = -\frac{2}{C + \ln^2 x}.$$

Сонымен, берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = uv = -\frac{2}{x\left(C + \ln^2 x\right)}. \quad \blacktriangleleft$$