Казахский национальный университет имени аль-Фараби

УДК 539.3:534.1(043) На правах рукописи

САБИРОВА ЮЛИЯ ФАРХАТОВНА

Моделирование динамики и виброзащиты нелинейных деформируемых систем

8D06104 – Математическое и компьютерное моделирование

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Отечественный научный консультант
д.ф.-м.н., профессор Хаджиева Л.А.

Зарубежный научный консультант
PhD, Senior Lecturer Prikazchikova L.A.

Республика Казахстан
Алматы, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ 4
ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ 5
ВВЕДЕНИЕ 7
1 АНАЛИЗ СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ 13
2 МОДЕЛИРОВАНИЕ И АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ ПРОТЯЖЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ 21
2.1 Постановка задачи динамики бурильной колонны как протяженной деформируемой системы. Методика вывода уравнений движения. 21
2.2 Дискретизация уравнений движения методом сосредоточенных параметров 27
2.3 Разработка обобщенного алгоритма решения и реализация параллельных вычислений 29
2.4 Верификация методики на тестовых задачах 39
2.4.1 Моделирование продольных колебаний бурильной колонны 39
2.4.2 Моделирование плоских поперечных колебаний бурильной колонны в потоке газа 50
2.4.3 Моделирование пространственных поперечных колебаний бурильной колонны в потоке жидкости 64
Выводы по разделу 2 80
3 МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ БУРИЛЬНЫХ КОЛОНН С РАЗЛИЧНЫМИ СЦЕНАРИЯМИ ВИБРОЗАЩИТЫ 81
3.1 Моделирование динамики бурильной колонны в потоке газа с учетом опорных стабилизаторов 81
3.1.1 Постановка задачи и дискретизация 81
3.1.2 Детали численной реализации 86
3.1.3 Анализ результатов численного моделирования 87
3.2 Моделирование нелинейной динамики бурильной колонны с учетом физически нелинейной континуальной демпфирующей муфты 101
3.2.1 Математическая модель связанных колебаний системы «колонна-муфта» 102
3.2.2 Детали численной дискретизации 105
3.2.3 Анализ эффективности виброгашения 110
Выводы по разделу 3 128
4 АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН И ПЛАСТИН НА НЕЛИНЕЙНОМ ОСНОВАНИИ 129
4.1 Уточнение принципа Сен-Венана для упругих высококонтрастных слоистых пластин 129
4.1.1 Постановка антиплоской задачи и условия затухания 130
4.1.2 Послойное асимптотическое решение 135
4.1.3 Вывод уточненного условия затухания 138

4.1.4 Частный случай равной толщины слоев 140
4.1.5 Численные примеры 142
4.2 Уточнение принципа Сен-Венана для упругих пластин на нелинейном основании типа Винклера 145
4.2.1 Сведение двумерной задачи антиплоского сдвига к одномерному осредненному уравнению 146
4.2.2 Вывод условий затухания 150
4.2.3 Частные случаи. Влияние параметров основания на поправочный член к классическому условию затухания 154
Выводы по разделу 4 158
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 159
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 162
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Разностные формулы и вывод граничных условий 172
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Обоснование выбора метода Рунге-Кутты для временной аппроксимации 175
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Обоснование корректности и сходимости применяемых численных схем 180

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей диссертационной работе использованы ссылки на следующие стандарты:

ГОСТ 7.1–2003 Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления.

ГОСТ 7.12–2011 Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Библиографическая запись. Сокращение слов на русском языке. Общие требования и правила.

ГОСТ 7.32–2017 Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления.

ГОСТ 8.417–2002 Государственная система обеспечения единства измерений. Единицы физических величин.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

U_1, U_2, U_3 – компоненты перемещения,
ε_{ij} – компоненты тензора деформаций,
σ_{ij} – компоненты тензора напряжения,
E – модуль упругости,
G – модуль сдвига,
ν – коэффициент Пуассона,
λ, μ – постоянные Ляме,
U – потенциальная энергия,
Φ – функционал упругого деформирования,
$\Re$ – функция Рэлея,
T – кинетическая энергия,
P – потенциал внешних сил,
L – длина бурильной колонны,
ρ – плотность материала,
A – площадь поперечного сечения бурильной колонны,
D_i, d_1 – внутренний диаметр бурильной колонны,
D_o, d_2 – внешний диаметр бурильной колонны,
d_3 – внешний диаметр демпфирующей муфты,
α – внутренний коэффициент демпфирования муфты,
$p_{in}(t)$ – мощность бура на входе,
$p_{out}(t)$ – мощность бура на выходе,
ω – угловая скорость вращения колонны,
$N(z,t)$ – осевая нагрузка,
$M(z,t), T(z,t)$ – крутящий момент,
I_x, I_y – осевые моменты инерции поперечного сечения,
c_{int} – коэффициент вязкого взаимодействия муфты с колонной,
k_{int} – коэффициент жесткости,
c_m^s – коэффициент демпфирования стабилизатора,
κ – показатель политропы,
P_0 – давление невозмущенного газового потока,
V_g – скорость невозмущенного газового потока,
ρ_s – плотность демпфирующей муфты,
A_s – площадь поперечного сечения демпфирующей муфты,
ρ_f – плотность промывочной жидкости,
A_f – площадь поперечного сечения внутреннего канала колонны,

V_f	– скорость потока промывочной жидкости,
ПВК	– программно-вычислительный комплекс,
МСП (LPM)	– метод сосредоточенных параметров (lumped parameter method),
ОДУ	– обыкновенные дифференциальные уравнения,
ООП	– объектно-ориентированное программирование,
БК	– бурильная колонна,
КНБК	– компоновка низа бурильной колонны,
НДС	– напряженно-деформируемое состояние,
RNRDPP	– rubber non-rotating drill pipe protector,
NRDPP	– non-rotating drill pipe protector,
CFD-FSI	– computational fluid dynamics – fluid structure interaction.

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика работы. Данная работа посвящена моделированию нелинейной динамики деформируемых систем, развитию методов их анализа применительно к решению проблем бурового оборудования нефтегазодобывающей отрасли. Исследовано влияние нелинейности параметров материала и слоистости структуры на функционирование средств виброзащиты.

Актуальность темы исследования. Современные исследования направлены на решение нелинейных проблем деформируемых систем. Нелинейность последних обусловлена снятием ограничений на величины деформаций, физической нелинейностью материала конструкций, нелинейной инерционностью динамических систем и др., что сопряжено с необходимостью развития и разработки новых математических моделей и методов их анализа, вычислительных алгоритмов и программного обеспечения. Все это позволит решать прикладные задачи на новом качественном уровне.

Особую актуальность данные исследования приобретают в контексте развития систем виброзащиты бурового оборудования, применяемого в нефтегазодобывающей отрасли для предотвращения нежелательных колебаний и преждевременного износа элементов. Интерес представляет область влияния физически нелинейных свойств конструктивных элементов типа демпферов на нелинейную динамику бурильных колонн. Развитие современного материаловедения стимулирует переход к использованию сложных многослойных композитных структур в качестве высокоэффективных демпферов. Широкое использование подобных многофункциональных высококонтрастных композитов в гражданском, промышленном, аэрокосмическом и автомобильном машиностроении требует уточнения имеющейся фундаментальной теории, разработанной для однородных и/или слабонеоднородных структур, поскольку практически важные краевые эффекты, наблюдаемые в высококонтрастных ламинатах, требуют дополнительного исследования.

Цель работы: развитие методов математического моделирования нелинейной динамики деформируемых систем, включая стержневые элементы бурильных колонн и тонкостенные слоистые демпфирующие муфты, для повышения эффективности средств виброзащиты.

В связи с поставленной целью вытекают **следующие задачи исследования**:

– разработка обобщенных нелинейных моделей динамики стержневых систем с учетом средств виброзащиты;

– создание программно-вычислительного комплекса для численной реализации разработанных моделей, обеспечивающий высокую точность анализа динамических характеристик неоднородных структур;

– верификация разработанного программно-вычислительного комплекса путем сравнения с результатами, известными в литературе;

– проведение многопараметрического анализа нелинейной динамики бурильных колонн с учетом влияния внешних факторов; выявление закономерностей работы виброзащитных устройств в различных режимах эксплуатации;

– асимптотический анализ краевых антиплоских задач высококонстрастных слоистых пластин и пластин на податливом нелинейном основании типа Винклера.

Объектом исследования диссертационной работы являются нелинейные деформируемые системы, в частности стержневые элементы бурового оборудования и упругие слоистные пластины.

Предметом исследования является математическое моделирование задач механики деформируемого тела, возникающих при разработке методов виброзащиты бурового оборудования.

Методы исследований. В работе использован комплексный подход, базирующийся на фундаментальных принципах механики (вариационный принцип Остроградского-Гамильтона для вывода уравнений движения и соотношения нелинейной теории деформирования В.В. Новожилова), современных методах математического моделирования сред и материалов (применение упругого потенциала Трелоара для описания физически нелинейных элементов, теории тонких упругих пластин и стержней), численных и дискретных методах (метод сосредоточенных параметров, метод Рунге-Кутты), аналитических методах (методы асимптотического анализа, метод Фурье для краевых задач эллиптического типа и определения условий затухания), методах компьютерного моделирования (C++, Python, OpenMP).

Научная новизна работы заключается в построении уточненных нелинейных моделей динамики стержневых систем, впервые учитывающих сопряжение перемещений стержня с собственной кинематикой демпфирующих элементов, моделируемых как геометрически и физически нелинейные сплошные деформируемые тела. Разработан оригинальный алгоритмический и программный комплекс на языке C++ с применением параллельных вычислений, адаптированный для анализа пространственных движений бурильных колонн при сложном нагружении (кручение, осевое сжатие, потоки сред). Впервые на основе асимптотического метода получены уточненные краевые условия (принцип Сен-Венана) для задач антиплоского сдвига в высококонтрастных слоистых пластинах и пластинах на нелинейно-упругом основании Винклера.

Научные положения, выносимые на защиту:

– комплекс нелинейных математических моделей стержневых систем, учитывающий переменную структуру и сопряжение с демпфирующими континуальными элементами. Обосновано, что учет собственной кинематики виброзащитных устройств позволяет выявить динамические эффекты, не описываемые в рамках традиционных дискретных моделей;

– алгоритмическая реализация и программный комплекс на базе метода сосредоточенных параметров с применением технологий параллельного программирования. Разработанная архитектура обеспечивает эффективное

решение задач большой размерности для систем со сложным нагружением (вращение, потоки сред, нелинейные связи) с высокой вычислительной устойчивостью;

– результаты многопараметрического анализа динамики бурильных колонн, установившие зависимости между геометрическими параметрами стабилизаторов, характеристиками нелинейных муфт и динамическими характеристиками системы. Доказана эффективность применения резинокордных элементов для гашения поперечных колебаний в условиях сверхзвукового обтекания и осевого сжатия;

– обобщение принципа Сен-Венана в случае антиплоского сдвига применительно к трехслойным высококонтрастным пластинам и однородным пластинам, опирающимся на податливое нелинейное основание типа Винклера.

Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов диссертационной работы обусловлена использованием известных фундаментальных законов механики сплошных сред, математические модели разрабатывались в соответствии с методикой, широко применимой на практике, разработанный программный комплекс верифицирован на тестовых задачах, результатах, известных в литературе, параметрический анализ, энергетические графики показывают физически обоснованные результаты.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Создание новых и обобщение существующих математических моделей нелинейных деформируемых систем расширит существующие знания о природе колебаний, а также дополнит теоретические знания в области деформации твердых тел. Разработка единой методики исследования позволит уточнить инженерные расчеты и расширит класс решаемых задач механики деформируемых сред. Результаты данного исследования имеют широкое прикладное применение в исследовании динамики машин и механизмов.

Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами

Диссертационная работа выполнялась в рамках трех научных проектов программы ГФ МНВО РК (п. 1-3), а также в рамках британского проекта Keele University & German Aerospace Center (DLR) (п. 4).

1) «Развитие математических моделей и методов анализа механических деформируемых систем со сложными нелинейными свойствами и переменной структуры в динамике машин» (**2020-2022 гг., AP08857255-ОТ-22**);

2) «Разработка нелинейных математических моделей и программных модулей для решения задач бурения скважин в добывающей промышленности» (**2021-2023 гг., AP09261135-ОТ-23**).

3) «Моделирование динамики нелинейно деформируемых систем и гетерогенных наноструктур в осложняющих условиях для решения проблем добывающей промышленности» **(2024-2026 гг., AP23490543)**

4) Asymptotic analysis of boundary value problems for strongly inhomogeneous multi-layered elastic plates **(2024-2026, EP/Y021983/1)**

Апробация работы. Результаты работы апробировались в рамках докладов на следующих мероприятиях:

– 58-й Международная научная студенческая конференция «МНСК-2020» (Новосибирск, Россия, 2020г.);

– XLVIII Международная летняя школа-конференция «Advanced Problems in Mechanics» (Санкт-Петербург, Россия, 2020г.);

– 16 Международная конференция «Dynamical Systems – Theory and Applications» (Лодзь, Польша, 2021г.);

– III Международная студенческая научно-практическая конференция «Youth Digital Forum YDF-2022» (Алматы, 2022г.);

– VIII Международная научно-практическая конференция «Informatics and Applied Mathematics», посвященная памяти д.т.н., профессора Р.Г.Бияшева (Алматы, 2023г.);

– Международная конференция, посвященная 90-летию КазНУ имени аль-Фараби и 75-летию академика Ш. С. Смагулова "Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education" (Алматы, 2024г.);

– V Международная конференция по нелинейной динамике NODYCON 2026 (Рим, Италия, 2026);

– научные семинары механико-математического факультета КазНУ им. аль-Фараби (2020-2026 гг., Алматы);

– научные семинары кафедры математического и компьютерного моделирования КазНУ им. аль-Фараби (2020-2026 гг., Алматы).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ [53, 102-103, 121-128], в том числе три публикации, индексируемые в базах данных Scopus и WOS в журналах AMM (SJR=1.126, CiteScore percentile=97, Q1), Symmetry (SJR= 0.467, CiteScore percentile=93, Q2), Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (SJR=0.806, CiteScore percentile=81, Q1), одна публикация в издании, индексируемом в базах данных Scopus, WOS и входящем в перечень рекомендованных (КОКНВО) ККСОН, а также семь публикаций в материалах международных конференций [122-128], в том числе четыре зарубежных [125-128].

Опубликованные по теме диссертации работы приводятся в списке литературы.

Личный вклад автора. Все результаты диссертационной работы получены соискателем самостоятельно под руководством научных консультантов. Личный вклад автора заключается в создании и верификации нового программного комплекса, разработке обобщенных моделей раздела III, асимптотическом анализе задач раздела IV, динамическом и многопараметрическом анализе, построении и анализе графиков задач всех разделов.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из титульного листа, содержания, нормативных ссылок, обозначений и сокращений, введения, четырех разделов, заключения, списка использованной

литературы из 128 работ и трех приложений. Работа составляет 183 страницы, содержит 90 иллюстраций и 18 таблиц.

Основное содержание диссертации. Во введении изложены общая характеристика работы, цель и задачи исследования, применяемые методы, теоретическая и практическая значимость, публикации, проекты, в рамках которых выполнялось исследование, перечень мероприятий, в рамках которых работа апробировалась.

В первом разделе представлен аналитический обзор современного состояния исследований в области нелинейной динамики деформируемых систем. Обоснована необходимость совершенствования математических моделей бурильных колонн, учитывающих влияние виброзащитных элементов. Также показана актуальность исследования низкочастотных колебаний в высококонтрастных композитах, что обусловлено недостаточной изученностью волновых процессов в структурах с существенно различающимися параметрами слоев. Приведена постановка задач.

Второй раздел посвящен созданию вычислительного комплекса на языке C++, реализующего моделирование плоских и пространственных нелинейных перемещений бурильных колонн как систем с сосредоточенными параметрами. Проведена верификация программного комплекса на известных моделях.

Третий раздел посвящен исследованию нелинейной динамики бурильных колонн при сложном динамическом нагружении с учетом виброзащитных элементов (опорных стабилизаторов и демпфирующих муфт). Сложное нагружение включает в себя осевое сжатие, кручение, собственный вес, воздействие потока газа на вращающийся стержень. Особенностью исследования является учет собственной кинематики муфты, моделируемой как геометрически и физически нелинейное сплошное тело.

Четвертый раздел посвящен исследованию локальных динамических процессов в зонах контакта элементов виброзащиты с основными конструкциями. Методами асимптотического анализа для уточненной краевой теории решается задача об антиплоском сдвиге высококонтрастных слоистых пластин. Для учета взаимодействия демпфирующих элементов с нелинейно-упругой средой (резинокордные слои, основание скважины), задача обобщена на случай полубесконечной пластины на нелинейном основании Винклера.

В заключении изложены основные результаты работы, оценка полноты достижения поставленных задач и рекомендации по практическому применению полученных результатов.

Благодарность. Автор горячо благодарит своего отечественного руководителя, д.ф.-м.н., профессора Хаджиеву Лелю Азретовну за неоценимый вклад в становлении автора как исследователя, профессиональное руководство, конструктивную обратную связь и поддержку на протяжении всего периода обучения, зарубежного научного руководителя, PhD Приказчикову Людмилу Анатольевну за теплый прием в университете Кила, Великобритания, ценные практические рекомендации, доступность к взаимодействию и обсуждению результатов работы не только очно в рамках стажировки, но в дистанционном

формате, и профессора Каплунова Юлия Давидовича за профессиональную экспертизу, проведение содержательных обсуждений и анализ результатов исследования по задачам раздела IV. Также автор выражает глубокую признательность членам семьи – Эльдару, Людмиле, Розе – за моральную поддержку и веру в автора.

1 АНАЛИЗ СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Математическое моделирование деформируемых систем является приоритетным направлением в области проектирования и эксплуатации современного промышленного оборудования. Разработка и создание новых, а также обобщение существующих математических моделей позволяют уточнить инженерные расчеты и предварительно проводить диагностику оборудования, что значительно снижает риски простоя и поломок, а также выгодно с точки зрения экономии денежных средств и времени. Частным случаем можно рассматривать протяженные стержневые элементы промышленного оборудования, повсеместно использующиеся в машино- и приборостроении, робототехнике, транспорте и энергетике; исследование динамики и виброзащиты подобных механизмов представляют научный и практический интерес.

Для Республики Казахстан исследование динамики протяженных стержневых систем приобретает особую актуальность в контексте развития моделей оборудования нефтегазодобывающего сектора [1]. Проектирование бурильных колонн требует глубокого понимания нелинейных динамических процессов, происходящих в конструкции, а также влияния внешних факторов на динамический отклик с целью обеспечения надёжности, безопасности и бесперебойной эксплуатации, особенно в условиях экстремальных нагрузок [2- 4].

Актуальные исследования динамики процессов бурения преимущественно учитывают геометрическую нелинейность [5]. Это обусловлено тем, что протяжённые бурильные колонны функционируют подобно гибким стержням, для которых характерны большие перемещения и конечные углы поворота, но малые деформации. В литературе также широко представлены работы на основе систем Эйлера-Бернулли [6-8], балок Тимошенко [9, 10], ранние работы Гуляева [11, 12], где динамические модели стержневых систем полагаются линейными. Работы [13-16] обозначили ограниченную область применения линейных моделей вследствие излишней идеализации и завышенных оценок, предложив альтернативные нелинейные модели динамических систем. Стоит отметить казахстанских исследователей Кудайбергенова Аскара [17], Кудайбергенова Аската [18], Умбеткулову А. [19], Сергалиева А. [20], работы которых посвящены моделированию нелинейной динамики бурильных колонн в осложненных условиях. Математические модели команды базируются на применении нелинейной теории упругости Новожилова [21]. Задачам бурения с инженерной точки зрения посвящены работы отечественных исследователей Сарсенбаева Х.А., Хамзиной Б.С., Бараева А., Жумабаева М.Ж., Баймишевой А., Нугуманова К.К. и др. [22-24].

Физическая нелинейность материала в задачах бурения учитывается значительно реже, чаще физическая нелинейность рассматривается через

нелинейность контактного взаимодействия (трения) колонны со стенками скважины [25-31], нелинейные ударные взаимодействия долота с породой [32- 45], нелинейность потоков жидкости и газа, обтекающих буровую колонну [46-52].

В большинстве работ [25-29] авторы используют контактную жесткость по Герцу для моделирования удара, когда радиальное смещение превышает зазор, а сила контакта пропорциональная деформации в степени 3/2. В работе китайских ученых [30] исследовалась модель износа обсадной трубы и динамика бурильной колонны, контактное взаимодействие колонны со стенками скважины (rub-impact – контакт-удар) задавалось через кусочно-нелинейную функцию. Авторы [31] задавали зависимость контактной силы от деформации стенки квадратично-упругой, также использовали гистерезисную нелинейную модель трения с переходом скольжение-качение. Радиальные упругие ограничители используются для имитации как ударных эффектов, так и трения авторами [32], в [33] для моделирования контактного взаимодействия применялся закон сухого трения Кулона и нелинейная кусочно-заданная сила восстановления. В наиболее ранних работах Yigit A.S. и Christoforou [34] используют модель на основе принципа импульса-количества движения для учета мгновенных ударов, включая качение с проскальзыванием и без него.

В случае учета контактного взаимодействия долота о породу нелинейность обусловлена процессами разрушения породы и силами на границе. В работе [35] взаимодействие долота с породой представляется в виде комбинации процессов резания породы и трения изношенной части долота о поверхность забоя, процесс разрушения породы (эволюции резания) описывался отдельным PDE, формируя связанную нелинейную систему. Эмпирическую кусочно-линейную зависимость разрушения породы (увеличение диаметра скважины стабилизаторами) от контактной силы применяли в работе [36]. К основным способам учета нелинейности в случае взаимодействия долота с горной породой можно отнести модели прилипания-скольжения (stick-slip), когда момент на долоте зависит от угловой скорости и имеет переключение между режимами прилипания и скольжения, и модели нелинейного трения, применяя модели Кулона, Stribeck и velocity-weakening friction (часто вместе с контактом со стенками скважины) [37-41], контактно-ударное взаимодействие, когда силы контакта возникают только при достижения зазора между элементами системы, потери контакта долота с забоем (bit bounce) [41-45], когда осевое усилие становится кусочно-нелинейным (контакт есть или отсутствует), нелинейный момент разрушения породы, когда момент сопротивления зависит от глубины резания, скорости вращения и свойств породы [46-48].

Нелинейные потоки жидкости в затрубном пространстве стандартно учитываются через присоединённую массу с учетом кориолисовых и центробежных сил, создаваемых потоком [49-52]. Так, авторами Pei et al. в статье [51] было установлено, что поток дестабилизирует систему, усиливает резонанс, совместно с осевой нагрузкой и крутящим моментом становится причиной неустойчивости системы, частично компенсируется стабилизаторами.

Аналогичные выводы были сделаны Liang et al. в [50]: поток снижает устойчивость и усиливает гироскопическую связь, а промежуточные опоры (стабилизаторы) компенсируют влияние потока. Развитием работы авторов Liang et al. в [52] стало исследование влияние непостоянного, периодически меняющегося потока жидкости на динамику бурильной колонны, в результате которого установлено, что именно поток вызывает параметрический резонанс, пульсации потока опаснее постоянного потока и становятся причиной квазипериодических вихревых движений, авторами подчеркивается влияние геометрической нелинейности на устойчивость решения. Поршневая теория газа применялась авторами для учета динамики бурильных колонн в сверхзвуковом потоке газа в работах [49, 53]. Стоит отметить направление, ориентированное на подробное изучение влияния потоков жидкости через связанные модели CFD-FSI (computational fluid dynamics – fluid structure interaction), где промывочная жидкость моделируются уравнением Навье-Стокса и связывается с конструкцией бурильной колонны согласующимися условиями на межфазной границе, однако нелинейная механика стержней в подобных работах упрощена, сложная деформация не рассматривается, акцент работ на динамике жидкости [54, 55].

Таким образом, в литературе широко представлены работы, учитывающие физическую нелинейность на контактном, средовом и процессном уровнях, однако имеется недостаток работ, учитывающих структурный уровень – учет нелинейности материала. Однако современные достижения в области материаловедения [56] и использование композитных и полимерных материалов в качестве конструктивных элементов буровых установок [27, 57] делают необходимым учет свойств материала, расширяют постановку задачи, требуя перехода к моделям, одновременно учитывающим как физическую, так и геометрическую нелинейности. Природа физической нелинейности материалов, когда закон Гука не выполняется, подробно представлена в работах [58, 59].

Совместный учёт физической и геометрической нелинейностей представляет собой актуальную, но сложную задачу. Так, в работе [60], посвящённой динамическому анализу стержневых систем, таких как локаторы и антенны куполообразной формы, было установлено, что совместное включение этих нелинейностей приводит к существенным изменениям частотного спектра и амплитудного отклика системы. В работе [61] на примере балки Тимошенко показано, что взаимодействие геометрических и физических факторов может приводить к формированию солитонов и опасных локализаций напряжений в материале. В работе Крысько [62] рассматривается динамика физически и геометрически нелинейного нанодатчика, моделируемого неоднородной нанобалкой в температурном и шумовом полях, с целью выявления закономерности перехода гармонических колебаний к хаотическим. Авторами [63] рассмотрено воздействие физических и геометрических нелинейностей на внутренний резонанс гетерогенного конечного стержня с микроструктурой, проведен анализ воздействия микроструктур на процесс взаимодействия мод, и выявлена зависимость между размером элементарной ячейки и соотношением

амплитуд колебаний. В работах [60-63] совместные геометрическая и физическая нелинейности учитываются на примере стержневых систем (антенн, куполов, нанобалок), не относящихся к бурению, однако подход к моделированию может быть применен и в контексте бурильных колонн.

Следующей актуальной задачей является учет влияния виброзащитных конструктивных элементов в буровых установках. Данные элементы снижают вибрационную энергию и подавляют колебания, существенно влияют на перераспределение нагрузок, устойчивость и формы колебаний. Применение внешних виброгасителей требует разработки как теории колебаний самого демпфера-стабилизатора, так и теории, описывающей динамическое поведение конструкции с установленным демпфером-стабилизатором [64].

В литературе широко представлены работы по моделированию динамики бурильных колонн с виброзащитными устройствами, устанавливаемыми в компоновке низа бурильной колонны (КНБК). К таким устройствам относятся гидромеханические компенсаторы, амортизаторы, демпфирующие вставки и другие элементы, предназначенные для снижения продольных, поперечных и крутильных колебаний бурильной колонны [65]. Наряду со специализированными виброзащитными средствами в составе КНБК широко применяются стабилизаторы и центраторы, представляющие собой опорно-направляющие элементы, обеспечивающие центрирование колонны в стволе скважины, ограничение боковых смещений и снижение интенсивности контакта со стенками скважины. Конструктивно стабилизаторы выполняются в виде жёстких или упруго-деформируемых элементов с лопастями либо цилиндрическими опорными поверхностями, а центраторы в виде втулочных или пружинных устройств, распределённых по длине колонны. В большинстве моделей стабилизаторы и центраторы рассматриваются как локальные упругие связи, изменяющие граничные условия системы и вводимые через коэффициенты жёсткости и демпфирования. Так, в работах [53, 66] стабилизаторы упрощаются до пружин с коэффициентом жёсткости, а их воздействие вводится с использованием дельта-функции Дирака. Параметрический перебор положений стабилизаторов для оптимизации их расположения проведен в работе [67], где стабилизаторы моделировались как линейные упругие опоры. В работе [50] в качестве стабилизаторов для тонких бурильных колонн используются промежуточные опоры, моделируемые как элементы, создающие бесконечные упругие силы; они вводятся в систему аналогично функции Дирака. Основное внимание в работе уделено изменению частотных характеристик и устойчивости системы за счёт размещения и жёсткости стабилизаторов. В исследованиях [28, 29, 68] анализируются участки утяжелённых бурильных труб, расположенные между стабилизаторами, с целью определения условий контакта, ударов и трения о стенки скважины. В этих работах моделирование сосредоточено на нелинейных силах взаимодействия, возникающих после превышения зазора. Определяющие уравнения движения выводятся с использованием уравнений Лагранжа, в которые затем вводятся нелинейные обобщённые силы, связанные со стабилизаторами.

Следующий класс составляют пассивные и полуактивные элементы с демпфирующими свойствами, выполненные с использованием резинокордных, эластомерных и полимерных материалов. К ним относятся амортизирующие вставки, стабилизаторы и центраторы с упругими элементами, демпфирующие протекторы. Их применение позволяет снижать вибрационные нагрузки, уменьшать трение и предотвращать контакт типа «металл–металл», что способствует снижению износа бурильных и обсадных труб, а также увеличению срока службы элементов КНБК. Группа норвежских ученых исследует эффективность применения распределенной системы демпфирования вдоль длины [69, 70, 71], где демпфер представляет собой опорную втулку на подшипниках с увеличенным диаметром, разгружающую контакт колонны со стенкой, и систему вихретокового торможения (eddy current brake), создающую вязкое крутильное демпфирование пропорционально относительной угловой скорости (закон Ленца). Отличительной особенность является включение кинематики распределенных элементов, однако сами демпферы не рассматриваются как сплошные тела. В работе [69] нелинейность учитывается многокомпонентно за счет нелинейного трения, нелинейного вязкого сопротивления бурового раствора, нелинейного поведения момента на долоте, а также контактных сил и ударных взаимодействий, модель учитывает осевые, крутильные и поперечные перемещения. Идея активного управления распределенными демпферами предложена Nüsse в работе [70] за счет изменения коэффициента демпфирования в режиме реального времени. Работа [71] посвящена обнаружению проскальзывания отдельного демпфера при подавлении крутильных колебаний. Прикладная инженерная задача по снижению износа обсадной трубы за счет применения резиновых не вращающихся протекторов бурильной колонны (RNRDPP – rubber non-rotating drill pipe protector) решена китайскими исследователями в [72]. Авторами установлено, при использовании протектора RNRDPP контактное давление распределяется по большей площади и уменьшается до 4-6% от исходного, что приводит к резкому снижению износа обсадной трубы (примерно в десятки раз). Значимость не вращающихся протекторов бурильной колонны (NRDPP – non-rotating dril pipe protector) исследовалась экспериментально N.B. Moore; P.W. Mock и R.E. Krueger в [73] для расчёта распределения контактных нагрузок и оптимального размещения устройств вдоль колонны. Возможность замены традиционных резиновых протекторов на современные полимерные материалы исследовала группа российских ученых в [57, 74]. Авторы оценили работоспособность новых материалов экспериментально в [74] в условиях, приближенных к бурению (контакт с буровым раствором, наличие абразивных частиц, трение, воздействие температуры), а в [57] на испытательном стенде протестировали готовый полимерный протектор. Было установлено, что полимерные протекторы потенциально могут заменить резиновые, современные полиуретановые и композитные материалы обеспечивают высокую износостойкость, ключевым ограничением остается температура и абразивный

износ, при проектировании необходимо учитывать жесткость материала при нагреве.

Широкое применение резинокордных, эластомерных и полимерных материалов в конструктивных элементах виброзащитного оборудования накладывает требование учета физической нелинейности в современных математических моделях. Недостаточный учет нелинейных эффектов неоднократно приводил к катастрофическим отказам, что подчёркивает необходимость постоянного совершенствования существующих математических моделей и методов анализа [75]. Существующие подходы зачастую не учитывают внутреннюю динамику демпфера и распределённый характер диссипативных процессов, протекающих внутри самого демпфирующего элемента.

Анализ представленных работ показывает, что математическое описание различных технических решений виброзащитного оборудования в основном базируется на упрощенных дискретных моделях. Демпфирование вводится за счет коэффициентов или сосредоточенных элементов, в то время как собственная кинематика элемента, влияние свойств его материала, взаимное перераспределение энергий не учитывается даже в самых современных исследованиях. В связи с этим актуальным является разработка обобщенных математических моделей, учитывающих демпфирующие элементы как сплошные континуальные тела, взаимодействующие с бурильной колонной, с учетом как геометрической, так и физической нелинейностей.

Развитие современного материаловедения стимулирует переход к использованию сложных многослойных композитных структур в качестве высокоэффективных демпферов. Подобные высококонтрастные ламинаты, сочетающие жесткие внешние слои и мягкие заполнители, находят широкое применение в аэрокосмической отрасли, судостроении и гражданском строительстве [76, 77]. Однако в таких средах физико-механические свойства распределяются специфическим образом, что делает классические подходы неприменимыми: существенная поперечная неоднородность приводит к возникновению дополнительных краевых эффектов, которые могут распространяться вдоль всей структуры [78]. В этих условиях традиционный принцип Сен-Венана в его классической форме перестает выполняться, требуя введения дополнительных асимптотических условий затухания для корректного описания напряженного состояния вдали от нагруженного торца [79, 80]. Это обуславливает необходимость уточнения краевой теории и обобщения граничных условий, в том числе для случаев взаимодействия элемента с упругим основанием. Учет такого взаимодействия через модель Винклера (включая её нелинейные расширения) позволяет более точно описать динамику виброзащитных систем, поскольку свойства основания напрямую влияют на скорость затухания краевых эффектов и асимптотическую точность низкоразмерных моделей [81, 82].

В связи с чем **целью данной диссертационной работы** является развитие методов математического моделирования нелинейной динамики

деформируемых систем, включая стержневые элементы бурильных колонн и тонкостенные слоистые демпфирующие муфты, для повышения эффективности средств виброзащиты.

Для достижения поставленной цели сформулированы **следующие задачи исследования**:

– разработка обобщенных нелинейных моделей динамики стержневых систем с учетом средств виброзащиты;

– создание программно-вычислительного комплекса для численной реализации разработанных моделей, обеспечивающий высокую точность анализа динамических характеристик неоднородных структур;

– верификация разработанного программно-вычислительного комплекса путем сравнения с результатами, известными в литературе;

– проведение многопараметрического анализа нелинейной динамики бурильных колонн с учетом влияния внешних факторов; выявление закономерностей работы виброзащитных устройств в различных режимах эксплуатации;

– асимптотический анализ краевых антиплоских задач высококонтрастных слоистых пластин и пластин на податливом нелинейном основании типа Винклера.

Логическая структура исследования представлена на рисунке 1.1.



Рисунок 1.1 – Логическая структура/стратегия исследования

На первом этапе (раздел 2) разработан вычислительный алгоритм на базе метода сосредоточенных параметров (МСП). Полученный инструмент применен в разделе 3 для анализа новых нелинейных моделей динамики бурильных колонн с конструктивными неоднородностями (стабилизаторы и демпферы). В ходе прикладного моделирования была выявлена высокая чувствительность динамических характеристик к параметрам демпфирования, что послужило предпосылкой для проведения фундаментального исследования в разделе 4. Методами асимптотического анализа в нем определены условия затухания возмущений и обоснована природа локальных процессов в зонах контакта элементов виброзащиты.

2 МОДЕЛИРОВАНИЕ И АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ ПРОТЯЖЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Данный раздел посвящен разработке обобщённых вычислительных алгоритмов и программного комплекса (на языке C++) с использованием технологий параллельного программирования, разработанных для исследования плоских и пространственных нелинейных колебательных процессов в стержневых конструкциях. Базовым алгоритмом комплекса выступает метод сосредоточенных параметров, адаптированный для расчета динамического поведения бурильных колонн с учетом конструктивной неоднородности. Проведена верификация результатов численного моделирования на тестовых нелинейных моделях плоских и пространственных перемещений бурильной колонны в условиях комплексного нагружения (комбинация осевого сжатия, кручения, вращения, потоков жидкости и газа). В разделе представлен алгоритм вывода уравнений движения на основе положений нелинейной теории упругости и вариационных принципов.

2.1 Постановка задачи динамики бурильной колонны как протяженной деформируемой системы. Методика вывода уравнений движения.

Под **деформируемым телом** в классической механике сплошных сред понимают физическое тело, расстояние между точками которого может изменяться при воздействии внешних сил, температур и других факторов, то есть тело, подверженное деформации [83]. В зависимости от соотношения геометрических размеров деформируемые тела классифицируют на одномерные стержни, где линейные размеры длины много больше других величин, двумерные оболочки и пластины, где два размера много больше третьего измерения, а также массивные (объёмные) тела с соизмеримыми размерами всех трех измерений [84]. Под **деформируемой системой** понимают совокупность тел (элементов), способных при действии внешних сил деформироваться, то есть изменять свою форму, размеры и взаимное расположение. **Нелинейные деформируемые системы** – деформируемые системы, в которой связь между нагрузками и деформациями не является линейной [21]. Наиболее распространенными нелинейными деформируемыми системами при изучении являются стержневые, поскольку они широко применяются в инженерных конструкциях и допускают значительное упрощение расчетных моделей, сводя пространственные задачи к одномерным.

Частным случаем геометрически нелинейной стержневой системы можно представить **буровую колонну**, применяемую в нефтегазодобывающей промышленности. Поперечное сечение колонны много меньше ее длины, а вследствие возникающих при работе больших перемещений и углов поворота, потери устойчивости система относится к геометрически нелинейной. Для

Казахстана, входящего в число крупнейших мировых экспортёров нефти, исследование вибрационных процессов, возникающих при бурении скважин, представляет значительный научный и практический интерес [1].

Для описания динамического поведения бурильной колонны вводятся поля упругих перемещений, зависящие от пространственных координат и времени $U_1(x,y,z,t), U_2(x,y,z,t), U_3(x,y,z,t)$. Поле перемещений по А. П. Филиппову [85] раскладывается на составляющие компоненты

$$\begin{aligned} U_1(x,y,z,t) &= u_1(z,t) + u_2(z,t) + \theta(z,t)y, \\ U_2(x,y,z,t) &= v_1(z,t) + v_2(z,t) - \theta(z,t)x, \\ U_3(x,y,z,t) &= w(z,t) + \alpha_x(z,t)y - \alpha_y(z,t)x + \frac{\partial\theta(z,t)}{\partial z}\varphi(\xi_1,\eta_1), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где рассматривается правая система координат xyz, ось z направлена по длине стержня; перемещения по осям x, y, z U_1, U_2, U_3, соответственно; $u_1(z,t), v_1(z,t)$ – перемещения сечения в результате изгиба; $w(z,t)$ – продольное перемещение; $u_2(z,t), v_2(z,t)$ – перемещения в результате сдвига; $\theta y, \theta x$ – перемещения вдоль осей x, y при повороте сечения на угол $\theta(z,t)$ относительно центра изгиба; $\frac{\partial\theta(z,t)}{\partial z}\varphi(\xi_1,\eta_1)$ – перемещение вследствие депланации (перемещение волокон поперечного сечения вдоль оси z), $\varphi(\xi_1,\eta_1)$ – функция кручения, зависящая от формы сечения; $\alpha_x(z,t) = -\frac{\partial v_1(z,t)}{\partial z}$, $\alpha_y(z,t) = \frac{\partial u_1(z,t)}{\partial z}$ – углы, на которые поворачиваются сечения вокруг осей x, y.

Как правило, для вывода уравнений применяется теория плоских сечений [86], согласно которой депланации не происходит и точки поперечного сечения не деформируются, а также пренебрегают членами перемещения вследствие сдвига $u_2(z,t), v_2(z,t)$. В моделях, рассмотренных в следующих разделах, приняты эти допущения. Составляющие изгиба оси бурильной колонны представлены на рисунке 2.1.

Нелинейные математические модели, рассмотренные в параграфах 2.4.2-2.4.3 и разделе 3, выводились на основе вариационного метода Остроградского-Гамильтона [87] в работах [17, 49, 88]. Согласно этому методу, прямой путь (истинное движение системы) на заданном промежутке $[t_1, t_2]$ делает стационарным действие Q, определенное выражением

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t, \tag{2.2}$$

что математически записывается как равенство нулю его вариации:

$$\delta Q = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + P)\mathrm{d}t = 0, \tag{2.3}$$

где $L = T - U + P$ – лагранжиан системы, T – кинетическая энергия, U – потенциальная энергия, P – потенциал внешних сил, δ – вариация на промежутке $[t_1, t_2]$.

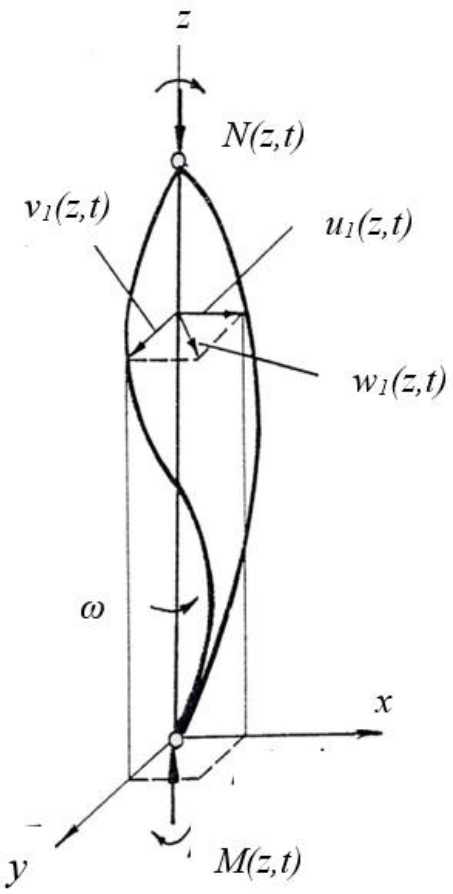


Рисунок 2.1 – Профиль изогнутой оси бурильной колонны [19]

Потенциальная энергия деформации находится из формулы Клапейрона [86]:

$$U = \iiint_V \Phi \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{jk} \varepsilon_{jk} \mathrm{d}V, \tag{2.4}$$

где ε_{jk} – компоненты тензора деформации, σ_{jk} – компоненты тензора напряжения, Φ – упругий потенциал. Соотношения представлены в индексной компонентной записи, где индексы пробегают значения 1, 2, 3 (либо x, y, z).

Для потенциала справедливы соотношения:

$$\sigma_{jk} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{jk}}, \quad \varepsilon_{jk} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{jk}}. \tag{2.5}$$

Используя соотношения связи напряжений и деформаций, упругий потенциал выражается либо через потенциал напряжений, либо через потенциал деформаций.

Для изотропных материалов, где физические свойства одинаковы во всех направлениях, связь между напряжением и деформацией линейна, описывается законом Гука:

$$\begin{aligned} &\sigma_{ii} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{ii}, \\ &\sigma_{ij} = \mu\varepsilon_{ij}, \quad i \neq j, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где λ, μ – постоянные Ляме. В данной работе используются инженерные компоненты сдвига, поэтому закон Гука записывается раздельно для нормальных и касательных напряжений.

Модели бурильной колонны, рассматриваемые в рамках данной диссертационной работы, выведены для изотропных тел в соответствии с законом Гука, то есть физически линейны. Для физически нелинейной демпфирующей муфты упругий потенциал задавался в соответствии с теорией Трелоара, где учитываются нелинейные свойства материала – накопление упругой энергии гиперупругих резиноподобных материалов при больших деформациях [59]. Упругий потенциал в этом случае определяется выражением

$$\Phi = \frac{1}{2} G\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)\right), \tag{2.7}$$

где G – модуль сдвига, $\lambda_i = \sqrt{1 + 2\varepsilon_i}, i = \overline{1,3}$ – удлинения в трех главных направлениях, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – главные компоненты тензора деформации.

Кинетическая энергия определяется выражением

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) \mathrm{d}V, \tag{2.8}$$

где ρ – плотность материала, v_1, v_2, v_3 – компоненты вектора скорости. Потенциал внешних сил задается в соответствии с силами, действующими на систему.

Учет конечных перемещений и поворотов приводит к необходимости использования геометрически нелинейной постановки задачи. Компоненты тензора деформаций в терминах перемещений запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ii} &= \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)^2, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}, \quad i \neq j,\end{aligned} \tag{2.9}$$

где $i, j = \overline{1,3}$, система координат $x_1 x_2 x_3$ соответствуют системе координат xyz. В нелинейных слагаемых по повторяющемуся индексу k подразумевается суммирование от 1 до 3.

Вводятся e_{ii} – относительные удлинения вдоль соответствующей оси, e_{ij} – сдвиги, ω_i – углы поворота вокруг соответствующей оси. Их соотношения связи с компонентами перемещений имеют вид:

$$e_{ii} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}, \quad e_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}, \quad \omega_i = \frac{(-1)^i}{2}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_j}\right), \tag{2.10}$$

где $i, j, k = \overline{1,3}, (i \neq j \neq k,\ j < k)$.

Компоненты тензора деформации записываются в соответствии с фундаментальной теорией нелинейной упругости В. В. Новожилова [21]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ii} &= e_{ii} + \frac{1}{2}\left[e_{ii}^2 + \left(\frac{1}{2}e_{ij} + \omega_k\right)^2 + \left(\frac{1}{2}e_{ik} - \omega_j\right)^2\right], \\ \varepsilon_{ij} &= e_{ij} + e_{ii}\left(\frac{1}{2}e_{ij} - \omega_k\right) + e_{jj}\left(\frac{1}{2}e_{ij} + \omega_k\right) + \left(\frac{1}{2}e_{ik} - \omega_j\right)\left(\frac{1}{2}e_{jk} + \omega_i\right),\end{aligned} \tag{2.11}$$

где $i, j, k = \overline{1,3}, i \neq j \neq k$.

Далее применяется вторая система упрощений теории В.В. Новожилова, в рамках которой не только удлинения и сдвиги, но и углы поворота малы относительно единицы. При этом допускается, что указанные величины могут иметь различные порядки малости. Компоненты тензора деформации записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ii} &= e_{ii} + \frac{1}{2}\left(\omega_j^2 + \omega_k^2\right), \\ \varepsilon_{ij} &= e_{ij} - \omega_i\omega_j, \quad i, j, k = \overline{1,3}, i \neq j \neq k,\ j < k.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Подобная методика широко применяется при решении прикладных задач механики нелинейно деформируемых сред. Выбор данного подхода обоснован физико-механическими характеристиками традиционных конструкционных материалов: в отличие от высокоэластичных сред (эластомеров, резины и подобных ей структур), металлы и их сплавы сохраняют упругую реакцию исключительно в узком диапазоне малых относительных деформаций [49].

Таким образом, через подстановку (2.1) в (2.10), из полученных соотношений, используя вторую систему упрощений Новожилова (2.12), получают тензор деформации. Далее находится упругий потенциал, вариационными методами выводятся уравнения движения в терминах компонент перемещений. Используя допущения, можно рассматривать частные случаи продольных, поперечных, крутильных и связанных колебаний. Более подробно о методике вывода моделей можно ознакомиться в диссертации Умбеткуловой А.Б. [19], в рамках которой были выведены новые обобщенные модели движения буровых штанг неглубинного бурения с учетом осложняющих факторов.

Для вывода обобщенной модели связанных колебаний системы «колонна-муфта» (параграф 3.2) в потенциальную энергию колонны и муфты с соответствующими знаками был добавлен член, отвечающий за упругое взаимодействие между конструкциями:

$$U_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int\limits_{z_{start}}^{z_{end}} k_{\text{int}}\left(u - u_s\right)^2 \mathrm{d}z. \tag{2.13}$$

Для учета диссипативных сил к лагранжиану системы была добавлена функция Рэлея [89]:

$$\Re_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int\limits_{z_{start}}^{z_{end}} c_{\text{int}}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_s}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}z. \tag{2.14}$$

Модели параграфа 3.1 были обобщены на случай включение опорных стабилизаторов, рассматриваемых как жесткие пружины. Для этого при выводе модели в потенциальную энергию был добавлен член упругого взаимодействия

$$\begin{aligned} U_{s,1} &= \frac{1}{2}\int\sum_{m=1}^{M} k_m^s u_1^2(x_3,t)\delta(x_3 - x_{3,m}^s)\mathrm{d}x_3, \\ U_{s,2} &= \frac{1}{2}\int\sum_{m=1}^{M} k_m^s u_2^2(x_3,t)\delta(x_3 - x_{3,m}^s)\mathrm{d}x_3. \end{aligned} \tag{2.15}$$

и функция Рэлея

$$\Re_{s,1} = \frac{1}{2}\int \sum_{m=1}^{M} c_m^s \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 \delta(x_3 - x_{3,m}^s)\mathrm{d}x_3,$$
$$\Re_{s,2} = \frac{1}{2}\int \sum_{m=1}^{M} c_m^s \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2 \delta(x_3 - x_{3,m}^s)\mathrm{d}x_3. \quad (2.16)$$

для учета диссипативных сил. Отличия от задачи параграфа 3.2 состоит в учете множества стабилизаторов с помощью дельта-функции Дирака, локальном действии единичного стабилизатора и пренебрежении собственной кинематики виброзащитного элемента.

2.2 Дискретизация уравнений движения методом сосредоточенных параметров

Для разработки численных моделей вращающихся валов и стержневых элементов на примере колебаний бурильных колонн применялся метод сосредоточенных параметров (МСП, LPM). Данный метод позволяет учесть переменность и неоднородность структуры объекта исследования, что актуально для конструктивных особенностей бурильных колонн: локальные и точечные нагрузки, переменность сечений и материалов, включение стабилизаторов и демпферов.

МСП известен еще в 70-гг. прошлого века, преимущественно используемый для задач строительной механики. Для изучения динамики многозвенных упругих механизмов данный метод использовался Sadler J.P в работе [90], в дальнейшем получивший развитие в [91-93]. Позже МСП был применен для анализа динамики пятизвенного преднапряженного упругого контура Хаджиевой Л.А. в кандидатском исследовании [94]. Развитие метода на случай анализа нелинейных гибких многотельных систем с автоматическим учётом геометрической нелинейности и динамического упрочнения было сделано Wang и Huston в [95]. Lee et al. в [96] применили МСП к задачам упругого удара, объединив модальное описание вибраций конструкции с контактной деформацией по Герцу для анализа динамики соударения сложных тел. МСП широко используется в структурной механике для моделирования плоских кривошипно-шатунных механизмов [97, 98]. Обобщенная модель сосредоточенных параметров бурильной системы успешно использовалась для изучения крутильных колебаний типа «скольжение-залипание» в работе Liu et al. в [99]. Для задач динамики бурильных колонн метод успешно применялся в работах [53, 100-103].

Суть метода заключается в дискретизации сплошной среды: объект представляется в виде конечного множества узлов, в которых локализованы массы, а также зафиксированы физико-геометрические характеристики и внешние нагрузки. Пример разбиения балки на узлы представлен на рисунке 2.2 из статьи Sadler J.P [92]. Такой подход позволяет эффективно моделировать

объекты с неоднородной структурой, сложной формой и локальными нагрузками, где аналитические методы трудоемки.

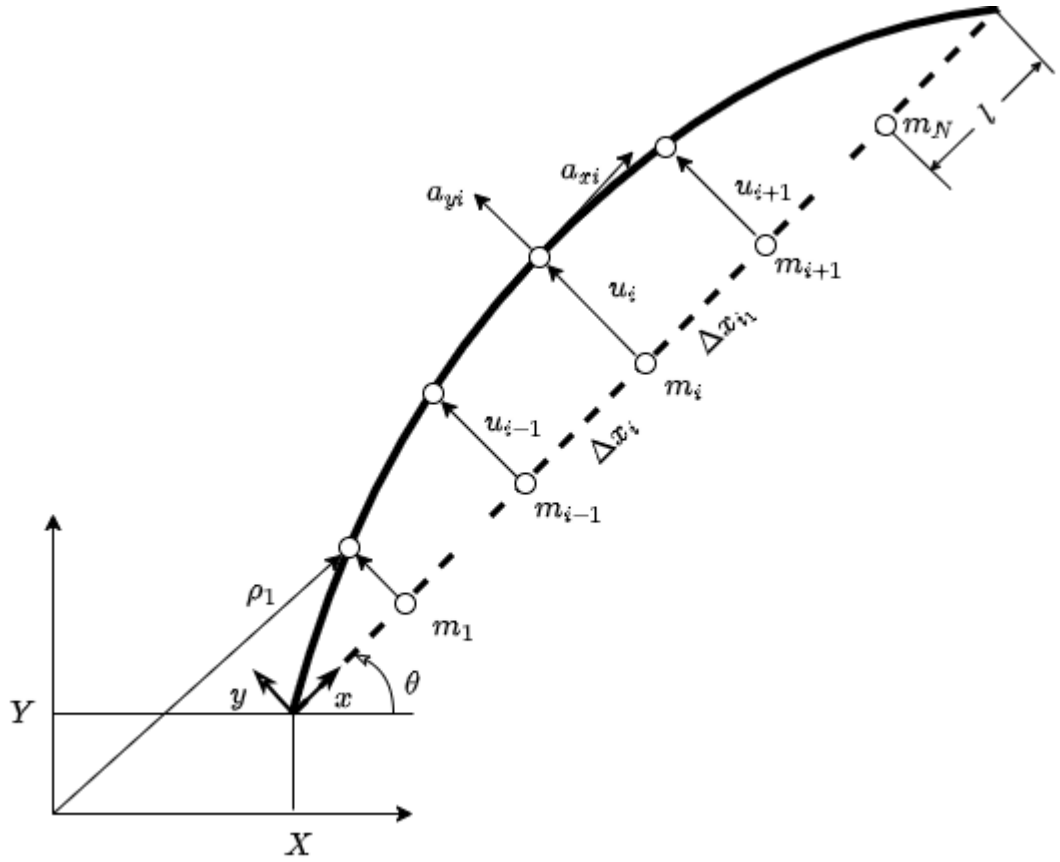


Рисунок 2.2 – Обобщенная модель сосредоточенных параметров упругой балки

Математически МСП сводится к аппроксимации пространственных переменных и преобразованию уравнений неразрывности в систему ОДУ. При этом масса каждого сегмента концентрируется на нейтральной оси в соответствии с законом сохранения масс:

$$M = \sum_{j=1}^{N} m_j \,, \tag{2.17}$$

а шаг разбиения определяется соотношением общей длины стержня к числу узлов:

$$l = \frac{L}{N-1},. \tag{2.18}$$

где m_j - масса элемента, l - длина элемента, M - полная масса объекта, L - длина стержня, N - число точек по длине стержня.

Процедура дискретизации сводится к замене непрерывного решения уравнения движения (в терминах перемещений $\bar{u}(x,t)$) на его сеточный аналог $\bar{u}(x_j,t_i)=\bar{u}_j(t_i)$. Искомая сеточная функция задается в узлах равномерной сетки $\varphi=\{(x_j,t_i): x_j=j\Delta x,\ j=\overline{0,N-1};\quad t_i=i\Delta t, i=\overline{0,\tau},\quad \tau=\dfrac{T}{\Delta t}\}$, где T – расчетное время, Δx – шаг по пространству, τ – число итераций по времени, Δt – временной шаг.

2.3 Разработка обобщенного алгоритма решения и реализация параллельных вычислений

Для решения дискретной системы ОДУ последовательно был разработан программно-вычислительный комплекс на языке C++, представляющий собой консольное приложение, предназначенное для широкого круга задач нелинейной динамики стержневых систем на примере бурильной колонны в условиях сложного нагружения (кручение, вращение, осевое сжатие, внешние потоки сред, наличие конструктивных элементов типа стабилизаторов и муфт). Разработка программного комплекса состояла из нескольких этапов:

1. Разработка алгоритма для решения продольных плоских перемещений (тестовая задача 2.4.1)
2. Обобщение алгоритма для решения плоских поперечных перемещений (разработка модуля преобразования трехдиагональной матрицы к диагональной алгоритмом Гаусса-Жордана, задача 2.4.2)
3. Обобщение существующего алгоритма на случай пространственных поперечных перемещений колонны (задача 2.4.3)
4. Учет включения в динамическую цепь опорных стабилизаторов (задача 3.1)
5. Обобщение алгоритма на случай расчета колебаний связанной системы «колонна-муфта» (задача 3.2).

Особенностями итогового обобщенного алгоритма являются:

1. **Универсальность:** разработанный алгоритм может быть применен к широкому классу задач нелинейной динамики стержневых систем;
2. **Масштабируемость и адаптивность:** алгоритм рассчитан на системы ОДУ произвольной размерности (позволяет изменять параметры дискретизации и конфигурацию системы муфт без изменения логики ядра программы) и может быть адаптирован для разного рода нагружения системы (осевое сжатие, кручение, вращение, локальные и точечные нагрузки, трение и так далее), то есть позволяет учесть неоднородность объекта исследования, переменность его физико-механических свойств;
3. **Алгоритмическая оптимизация** за счет средств параллельного программирования;
4. **Гибридная дискретизация.** Алгоритм позволяет представлять континуальную модель вращающегося стержня в виде системы из N

сосредоточенных масс. Особенностью реализации является возможность включения в динамическую цепь дополнительных элементов – распределенных демпфирующих муфт. Муфты имеют собственную дискретизацию и связаны с основной колонной через коэффициенты жесткости и вязкости, что позволяет моделировать связанные колебания сложной структуры.

5. **Предварительные матричные преобразования методом Гаусса-Жордана** [104]. В данном алгоритме реализован блок пре-процессинга, преобразующий трехдиагональную матрицу (2.19) до временного цикла в диагональную матрицу (2.20) для дальнейшего решения системы ОДУ методом Рунге-Кутты (2.21). Блок пре-процессинга возвращает вектор коэффициентов преобразования g_j.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & a & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & a & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ ... \\ ... \\ z_j \\ ... \\ ... \\ z_{N-2} \\ z_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ ... \\ ... \\ f_j \\ ... \\ ... \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

где $a = -\dfrac{\rho I c^2}{l^2 L}$, $b = \rho c^2 L\left(A + \dfrac{2I}{l^2 L^2}\right)$, $\bar{z}$ – вектор ускорений $z_j = \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j$, $\bar{f}$ – вектор правых частей; все нелинейные члены содержатся в нем. После преобразований получаем систему вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ ... \\ ... \\ z_j \\ ... \\ ... \\ z_{N-2} \\ z_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 f_0 \\ g_1 f_1 \\ ... \\ ... \\ g_j f_j \\ ... \\ ... \\ g_{N-2} f_{N-2} \\ g_{N-1} f_{N-1} \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

где g_j – коэффициенты, полученные в ходе алгебраических преобразований.

6. **Высокий порядок аппроксимации.** В данной работе полученные дискретные системы ОДУ были решены методом Рунге-Кутты 4-го порядка, где система уравнений вида $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ решается по вычислительной формуле:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{y}^n + \frac{h}{6}\left(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4\right),\\
&\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(x^n, \mathbf{y}^n),\\
&\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(x^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right),\\
&\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(x^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right),\\
&\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}\left(x^n + h, \mathbf{y}^n + h\mathbf{k}_3\right).
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

где $\mathbf{y}$ – вектор неизвестных функций системы, h – шаг интегрирования, $\mathbf{f}$ – вектор правых частей системы ОДУ. Обоснование выбора метода Рунге-Кутты 4-го порядка приводится в Приложении Б через анализ сеточной сходимости.

Выбор метода обусловлен высокой точностью $O(h^4)$, устойчивостью, относительной простотой реализации и эффективностью при работе с многомерными системами. Обоснование сеточных схем по пространству описывается в Приложении В.

7. **Учет комплексной физики взаимодействия**. Алгоритм адаптирован, но не ограничен учетом следующих факторов: геометрическая нелинейность изгиба, переменная осевая нагрузка по длине (с учетом собственного веса и внешних сил), центробежные силы и гироскопические эффекты, вызванные вращением, аэрогидродинамическое воздействие (учет параметров потока жидкости, газа), контактное взаимодействие (учет зазора между колонной и стенкой скважины), объемную деформацию стержня.

Алгоритм реализации программно-вычислительного комплекса (псевдокод):

1. Инициализация:
   - 1.1. Задание геометрических и физических параметров системы (E, ρ, ν, L, N и т.д.);
   - 1.2. Задание граничных и начальных условий;
   - 1.3. Дискретизация стержня на N сегментов (МСП) – определение функции правой части дискретной системы ОДУ;
   - 1.4. Определение топологии расположения муфт для задачи параграфа 3.2;
   - 1.5. Определение функции правых частей системы ОДУ – действующих сил на систему;

2. Предварительный расчет:
   2.1. Формирование трехдиагональной матрицы;
   2.2. Гауссовы преобразования для получения вектора коэффициентов перед правой частью уравнения. Сведение к диагональной матрице алгоритмом Гаусса-Жордана;
3. Основной цикл (Пока $t < T_{\max}$):
   3.1. Расчет стадий Рунге-Кутты:
      3.1.1. Вычислить силы взаимодействия в узлах стержня;
      3.1.2. Вычислить силы в демпфирующих муфтах и их связь с колонной;
      3.1.3. Параллелизация (OpenMP): расчет сил для каждого узла $j \in [1, N]$ выполняется в независимых потоках;
   3.2. Обновление вектора состояний: линейная комбинация стадий $\mathbf{k}_i$ для получения искомых переменных на следующем временном шаге $u(t+dt), v(t+dt)$;
   3.3. Условие записи в файл: Если $t \bmod t_{save} == 0$, сохранить данные в CSV.
4. Завершение: Очистка памяти, деаллокация массивов.

Общая архитектура вычислительного комплекса представлена в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Общая архитектура ПВК

Название модуля	Краткое описание
1	2
Модуль инициализации и конфигурации	На данном уровне происходит считывание параметров из файла: – Физико-механических свойств системы (модуль Юнга, плотность, коэффициенты Пуассона и т.д.). – Задание геометрии системы и параметров дискретизации (шаг по пространству dx, шаг по времени dt). – Определение начальных условий и граничных условий.
Блок предвычислений	Формирование математического каркаса модели: – Генерация функций правых частей системы ОДУ для колонны и муфты в терминах заданных компонент деформации.

Продолжение таблицы 2.1

1	2
	– Подмодуль преобразований Гаусса**:** расчет векторов весовых коэффициентов, позволяющих разрешить систему уравнений относительно ускорений в диагональных точках. Результаты кэшируются в оперативной памяти для использования решателем.
Вычислительное ядро (Интегратор)	Цикл по времени, внутри которого выполняются четыре стадии расчета сил: – Параллельный расчет сил (OpenMP): Для каждого узла стержня и муфты независимо вычисляются промежуточные значения коэффициентов Рунге-Кутты – оценок наклона функций. Использование директив параллельного программирования позволяет эффективно распределять расчеты между ядрами процессора. – Блок межэлементной связи: Расчет взаимодействия между стержнем и муфтами в точках их фактического расположения (Muft_location). – Шаг Рунге-Кутта: Агрегация вычисленных стадий и обновление вектора состояния системы на новый временной слой.
Модуль вывода и постобработки данных	Реализация записи результатов в специализированные форматы: – .csv и .dat файлы для хранения временных рядов перемещений и скоростей в выбранных сечениях. – Формирование файлов параметров для обеспечения воспроизводимости расчетов и логов вычислительных экспериментов.

Блок схема алгоритма представлена на рисунке 2.3. Технические требования к ПВК представлены в таблице 2.2. Для активации параллельных вычислений при сборке проекта обязательно должен быть включен флаг /openmp

(для MSVC) или -fopenmp (для GCC). ПВК использует динамическое распределение памяти, в коде реализована корректная ее очистка, что предотвращает учетку памяти при проведении длительных серий вычислительных экспериментов. Использование типа данных double обеспечивает необходимую точность для решения нелинейных динамических задач с малым шагом интегрирования.

Таблица 2.2 – Технические требования к ПВК

Программные требования (Software Requirements)	
1	2
Операционная система	Семейство Microsoft Windows (7/10/11) или дистрибутивы на базе ядра Linux.
Язык программирования	C++ стандарта не ниже ISO/IEC C++11
Компилятор	Поддерживающий спецификацию OpenMP 2.0 и выше, для Windows: Microsoft Visual C++ (MSVC) версии 2015 и выше или MinGW (GCC), для Linux: GCC или Clang
Библиотеки	Стандартная библиотека шаблонов (STL) для работы с потоками данных, omp.h – заголовочный файл для реализации параллельных вычислений.
Аппаратные требования (Hardware Requirements)	
Процессор (CPU)	Многоядерный процессор с поддержкой технологии многопоточности, минимальное количество физических ядер – 4, оптимально 8 для решения систем большой размерности.
Оперативная память (RAM)	Для задач малой размерности ($N < 500$): не менее 2ГБ, для задач высокой размерности ($N > 5000$): не менее 8ГБ.
Дисковое пространство	От 500МБ для хранения лог-файлов и результатов расчетов в формате .csv (объем данных растет пропорционально количеству шагов записи данных).

Необходимость внедрения технологий параллельных вычислений обусловлена высокой вычислительной трудоемкостью задачи: малым шагом

интегрирования по времени и значительным количеством узлов разбиения колонны, что влечет за собой резкое увеличение числа итераций.

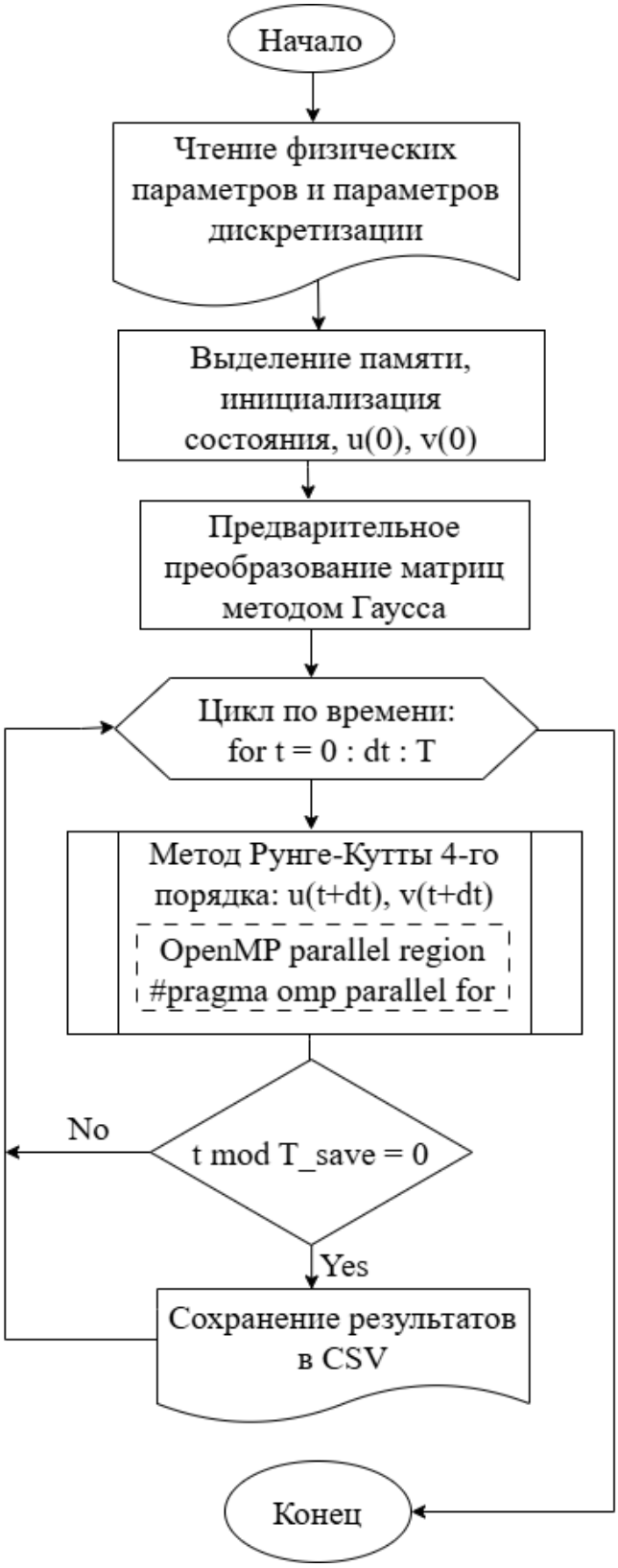


Рисунок 2.3 – Блок-схема алгоритма

Для ускорения расчетов в рамках одномерных задач (в частности, для метода Рунге-Кутты 4-го порядка) наиболее целесообразно использование стандарта OpenMP [105]. Количество потоков задавалось с помощью функции omp_set_num_threads(q), где q определяет число потоков. Распределение итераций в цикле между потоками осуществлялось директивой #pragma omp parallel for, которая формирует параллельную область и распределяет итерации цикла for между доступными потоками. Для измерения времени выполнения программы использовалась функция omp_get_wtime(), возвращающая значение системного времени с высокой точностью. Функция omp_get_num_threads() определяет фактическое значение потоков, участвующих в выполнении параллельной области. На рисунке 2.4 представлены структурные схемы алгоритмов: последовательная реализация (а) и предложенная схема декомпозиции для параллельной обработки (б).

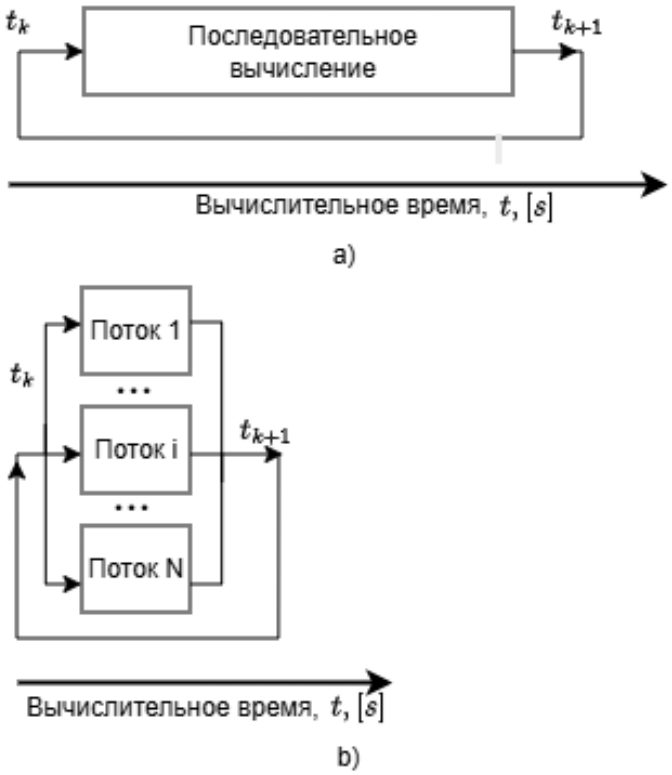


Рисунок 2.4 – Схемы a) последовательного и b) параллельного алгоритмов

Для оценки производительности системы обозначим через p количество задействованных потоков, $T_p(N)$ – среднюю продолжительность одной итерации при их использовании (в секундах). Коэффициент ускорения параллельного алгоритма $S_p(N)$ рассчитывается по следующей формуле:

$$S_p(N) = \frac{T_1(N)}{T_p(N)}, \tag{2.22}$$

характеризует прирост быстродействия относительно последовательного выполнения программы.

Эффективность использования вычислительных ресурсов определяется следующим образом:

$$E_p(N) = \frac{S_p(N)}{p}. \tag{2.23}$$

Соотношение $C_p(N)$, называемое стоимостью вычислений, показывает совокупное преимущество параллельной реализации [105], формула имеет вид:

$$C_p(N) = T_p(N)p. \tag{2.24}$$

Вычислительный эксперимент проводился на системе с процессором Intel Xeon Phi 7210, оснащенной 16 Гб высокоскоростной памяти MCDRAM, операционной системой AlmaLinux 9.8.

Таблица 2.3 – Данные вычислительных экспериментов для оценки эффективности распараллеливания

p	$T_p(N)$	$S_p(N)$	$E_p(N)$	$C_p(N)$
1	2	3	4	5
$N = 101$				
1	1.34E-03	1.00	1.00	1.34E-03
4	4.44E-04	3.02	0.76	1.78E-03
8	3.00E-04	4.48	0.56	2.40E-03
12	2.40E-04	5.61	0.47	2.88E-03
16	2.20E-04	6.11	0.38	3.52E-03
32	1.76E-04	7.63	0.24	5.63E-03
64	2.26E-04	5.95	0.09	1.45E-02
$N = 501$				
1	6.64E-03	1.00	1.00	6.64E-03
4	2.12E-03	3.13	0.78	8.49E-03
8	1.38E-03	4.81	0.60	1.10E-02
12	1.02E-03	6.51	0.54	1.22E-02
16	9.99E-04	6.65	0.42	1.60E-02
32	7.58E-04	8.76	0.27	2.43E-02
64	6.70E-04	9.91	0.15	4.29E-02
$N = 1001$				
1	1.28E-02	1.00	1.00	1.00E+00
4	3.90E-03	3.28	0.82	8.19E-01
8	2.37E-03	5.38	0.67	6.73E-01
12	1.85E-03	6.92	0.58	5.76E-01

Продолжение таблицы 2.3

1	2	3	4	5
16	1.58E-03	8.11	0.51	5.07E-01
32	1.25E-03	10.21	0.32	3.19E-01
64	1.20E-03	10.69	0.17	1.67E-01

Результаты проведенного вычислительного эксперимента отражены в таблице 2.3. Анализ данных показывает, что внедрение параллельного алгоритма позволяет достичь 3-10-кратного ускорения относительно последовательной реализации. Однако выявлено ограничение масштабируемости: увеличение числа потоков свыше 32 не дает выигрыша во времени по сравнению с 16 потоками. Визуализация показателей ускорения и эффективности (рисунки 2.5, 2.6) подтверждает данные выводы. При установлении минимально допустимого порога эффективности в 50% использование более 12 потоков становится нерациональным, несмотря на формальный рост ускорения. Оптимальный баланс между быстродействием и использованием ресурсов достигается при выделении от 4 до 8 потоков, что свидетельствует о наибольшей рентабельности алгоритма при малом количестве параллельных процессов.

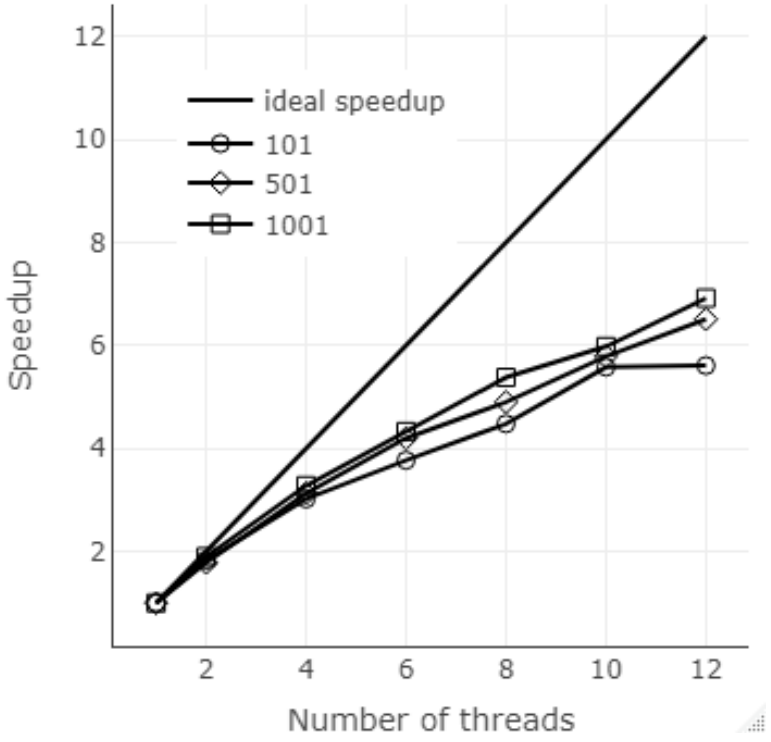


Рисунок 2.5 – Ускорение параллельного алгоритма в зависимости от числа потоков

В дальнейшем развитие разработанного ПВК видится в рефакторинге кода в рамках объектно-ориентированного программирования (ООП); переход от

консольного приложения к формату кросс-платформенных вычислительных библиотек для расширения области применения алгоритма (C++ API: создание динамических библиотек .dll/.so, которые могут быть интегрированы в сторонние инженерные пакеты и CAD/CAE-системы); разработке интерфейса на языке Python, что позволит исследователям использовать ПВК в среде Jupyter Notebook, проводить автоматизированную оптимизацию параметров и применять методы машинного обучения для анализа динамики систем, используя мощные библиотеки визуализации (Matplotlib, Plotly); алгоритмические развитие за счет использования адаптивной сетки. То есть вектор развития ПВК направлен на переход от узкоспециализированного исследовательского инструмента к высокопроизводительной программной платформе, пригодной для интеграции в современные промышленные системы.

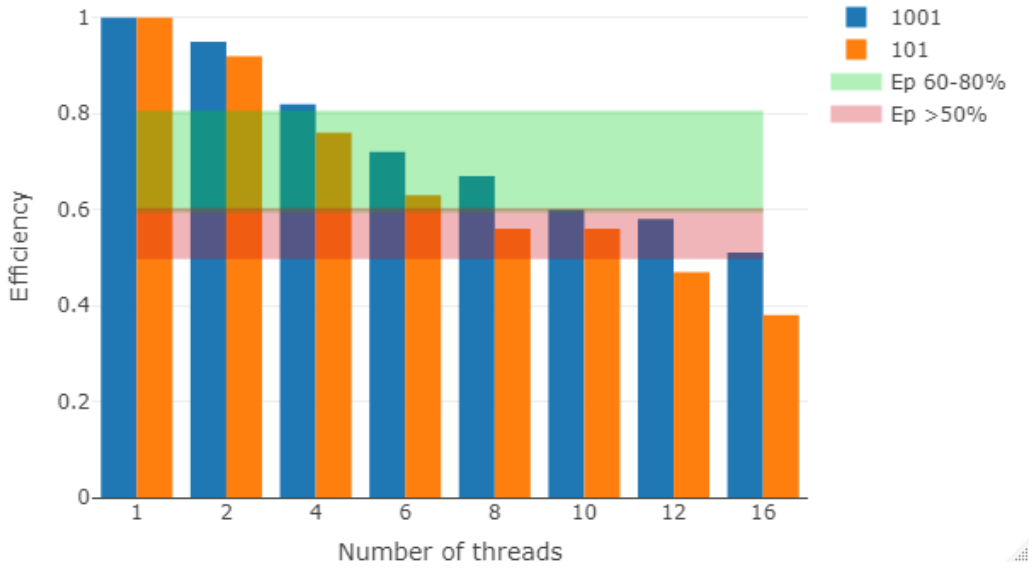


Рисунок 2.6 – Эффективность алгоритма в зависимости от числа потоков

2.4 Верификация методики на тестовых задачах

2.4.1 Моделирование продольных колебаний бурильной колонны

В качестве первой тестовой задачи рассматривалась модель продольных колебаний горизонтальной бурильной колонны с учетом влияния трения о породу, силы реакции забоя на породоразрушающий инструмент, гравитационных сил и гармонической переменной силы. Представленная математическая модель заимствовала из трудов Ритто Т. [106] и также рассматривалась казахстанскими исследователями Сергалиевым А. С. и Хаджиевой Л. А. в работе [101]. Схема нагружения представлена на рисунке 2.7. Верхний рисунок представляет физическую схему процесса, а нижний рисунок показывает эквивалентную механическую модель, абстракцию верхнего рисунка.

В общем виде уравнение движения запишется следующим образом:

$$\rho A\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - EA\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f_{\text{har}}(x,t) + f_{\text{sta}}(x,t) + \\ + f_{\text{fric}}(\dot{u}(x,t)) + f_{\text{bit}}(\dot{u}(x,t)) + f_{\text{mass}}(\ddot{u}(x,t)), \tag{2.25}$$

где $u(x,t)$ – продольные колебания бурильной колонны, L – длина буровой штанги, E – модуль упругости Юнга, A – площадь поперечного сечения, ρ – плотность, правая часть уравнения – силы, действующие на колонну.

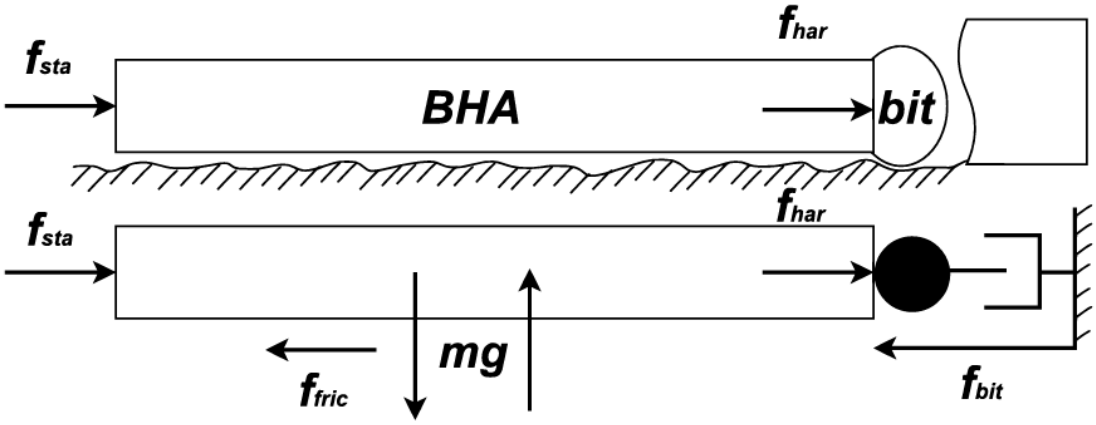


Рисунок 2.7 – Расчетная схема нагружения бурильной колонны

Математические выражения для гармонической силы f_{har}, постоянной нагрузки f_{sta}, приложенной к верхнему концу бурильной колонны (при $x = 0$), а также для сил тяжести и контактного трения колонны о породу запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} f_{\text{har}}(x,t) &= F_0 \sin(\omega_f t)\delta(x-L), \\ f_{\text{sta}}(x,t) &= F_{\text{sta}}\delta(x), \\ f_{\text{mass}}(\ddot{u}(x,t)) &= -m_{\text{bit}}\ddot{u}(x,t)\delta(x-L), \\ f_{\text{fric}}(\dot{u}(x,t)) &= -\mu(x)(\rho A)g\,\text{sgn}(\dot{u}(x,t)), \end{aligned} \tag{2.26}$$

где F_0, ω_f – соответствующие амплитуда и частота гармонического воздействия, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака (для описания сосредоточенных нагрузок), F_{sta} – амплитуда осевой нагрузки, g – ускорение силы тяжести, m_{bit} – масса долота на забое ($x = L$), $\mu(x)$ – коэффициент трения о породу.

Статическую сжимающую силу (силу реакции породы на долото) в конце штанги запишем в экспоненциальной форме:

$$f_{\text{bit}}(\dot{u}(x,t)) = \begin{cases} \left(c_1 \exp(-c_2 \dot{u}(x,t)) - c_1\right)\delta(x-L), & \dot{u}(L,t) > 0, \\ 0, & \dot{u}(L,t) \le 0, \end{cases} \tag{2.27}$$

где c_1, c_2 – коэффициенты взаимодействия долота о породу.

Перепишем уравнение (2.5) следующим образом:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{\text{fric}}(\dot{u}(x,t)), \tag{2.28}$$

где граничные условия примут вид в соответствии со схемой нагружения на рисунке 2.7:

$$\begin{aligned} &x = 0: \quad EA \frac{\partial u}{\partial x} = -F_{\text{sta}}, \\ &x = L: \quad EA \frac{\partial u}{\partial x} = f_{\text{har}}(x,t) + f_{\text{mass}}(\ddot{u}(x,t)) + f_{\text{bit}}(\dot{u}(x,t)). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Проведем обезразмеривание системы с использованием следующих масштабов:

$$u = L\tilde{u}, \quad x = L\tilde{x}, \quad t = \frac{\tilde{t}}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}. \tag{2.30}$$

После подстановки масштабов (2.30) в уравнения (2.28)-(2.29) и алгебраических преобразований запишем систему в виде (знак «тильда» опущен для простоты):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\mu(x) g}{L c^2} \operatorname{sgn}(\dot{u}(x,t)), \\ &x = 0: \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F_{\text{sta}}}{EA}, \\ &x = 1: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(\rho A) L}{m_{\text{bit}}} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{F_0}{m_{\text{bit}} L c^2} \sin\left(\frac{\omega_f}{c} t\right) + \frac{1}{m_{\text{bit}} L c^2} f_{\text{bit}}(Lc\dot{u}(x,t)). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Для численного моделирования применялся метод сосредоточенных параметров. Непрерывная бурильная колонна аппроксимируется стержнем, разбитым на конечное число элементов. Длина каждого участка $2l = \frac{L}{N-1}$ где N задает число узлов пространственной сетки. После сеточной аппроксимации

безразмерного уравнения движения и граничных условий разностными формулами (А.1)-(А.2) из Приложения А, получим следующую систему ОДУ:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{1}{3l^2}(2u_0 - 3u_1 + u_2) = -\frac{\mu g}{Lc^2}\operatorname{sgn}(\dot{u}_1), \quad j = 1, \\
&\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \frac{1}{4l^2}(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) = -\frac{\mu g}{Lc^2}\operatorname{sgn}(\dot{u}_j), \quad j = \overline{2, N-2}, \\
&\frac{\partial^2 u_{N-1}}{\partial t^2} - \frac{1}{3l^2}(u_{N-2} - 3u_{N-1} + 2u_N) = -\frac{\mu g}{Lc^2}\operatorname{sgn}(\dot{u}_N), \quad j = N-1.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
&x = 0 : u_1 - u_0 = -\frac{lF_{\text{sta}}}{EA}, \\
&x = 1 : \frac{\partial^2 u_N}{\partial t^2} + \frac{(\rho A)L}{m_{\text{bit}}}\frac{(u_N - u_{N-1})}{l} = \frac{F_0}{m_{\text{bit}}Lc^2}\sin\left(\frac{\omega_f}{c}t\right) + \frac{1}{m_{\text{bit}}Lc^2} f_{\text{bit}}(Lc\dot{u}_N).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Детали численной реализации. Результаты численного моделирования

Результирующую систему ОДУ интегрировали классическим методом Рунге-Кутты 4-го порядка на языке С++. Графическая интерпретация расчетных данных выполнялась с использованием программных средств Tecplot и Gnuplot. Исходные значения нагрузок, а также геометрические и физические параметры системы были заимствованы из работы [106]: $E = 210\,ГПа$, $\rho = 7850\,кг/м^3$, $g = 9{,}81\,м/с^2$, $D_i = 0.10\,м$ (внутренний диаметр), $D_o = 0.15\,м$ (внешний диаметр), $\frac{L}{D_0} = 400$, $m_{bit} = 20\,кг$, $c_1 = 1{,}4 \times 10^3\,Н$, $c_2 = 400$, $\mu = 0{,}1$, $\omega_f = 100 \times \frac{2\pi}{60}\,рад/с$, $t \in [0{,}10]$, $\Delta t = 0{,}0001c$, $f_{sta} = 5500\,Н$, $F_0 = 550\,Н$.

Графики перемещений и скорости долота представлены на рисунках 2.8- 2.9. Дискретизация колонны выполнена с разбиение на 100 элементов ($N = 101$).

Рисунок 2.8 демонстрирует изменение продольного перемещения бурильной колонны на забое $x = L$. В условиях свободного продвижения инструмента наблюдается монотонный рост перемещений.

Согласно рисунку 2.9, изменение скорости на левом конце колонны имеет осциллирующий характер. Подобные колебания, способствующие снижению скорости, вызваны воздействием расчетных нагрузок на компоненты системы.

Количественная оценка эффективности работы установки производится на основе сопоставления входной и выходной мощностей бура по приведенным ниже зависимостям:

$$\begin{aligned} p_{\text{in}}(t) &= f_{\text{sta}}\dot{u}(0,t) + f_{\text{har}}(t)\dot{u}(L,t), \\ p_{\text{out}}(t) &= f_{\text{bit}}\dot{u}(L,t), \end{aligned} \tag{2.34}$$

где $p_{\text{in}}(t)$ – мощность бура на входе, $p_{\text{out}}(t)$ –мощность бура на выходе.

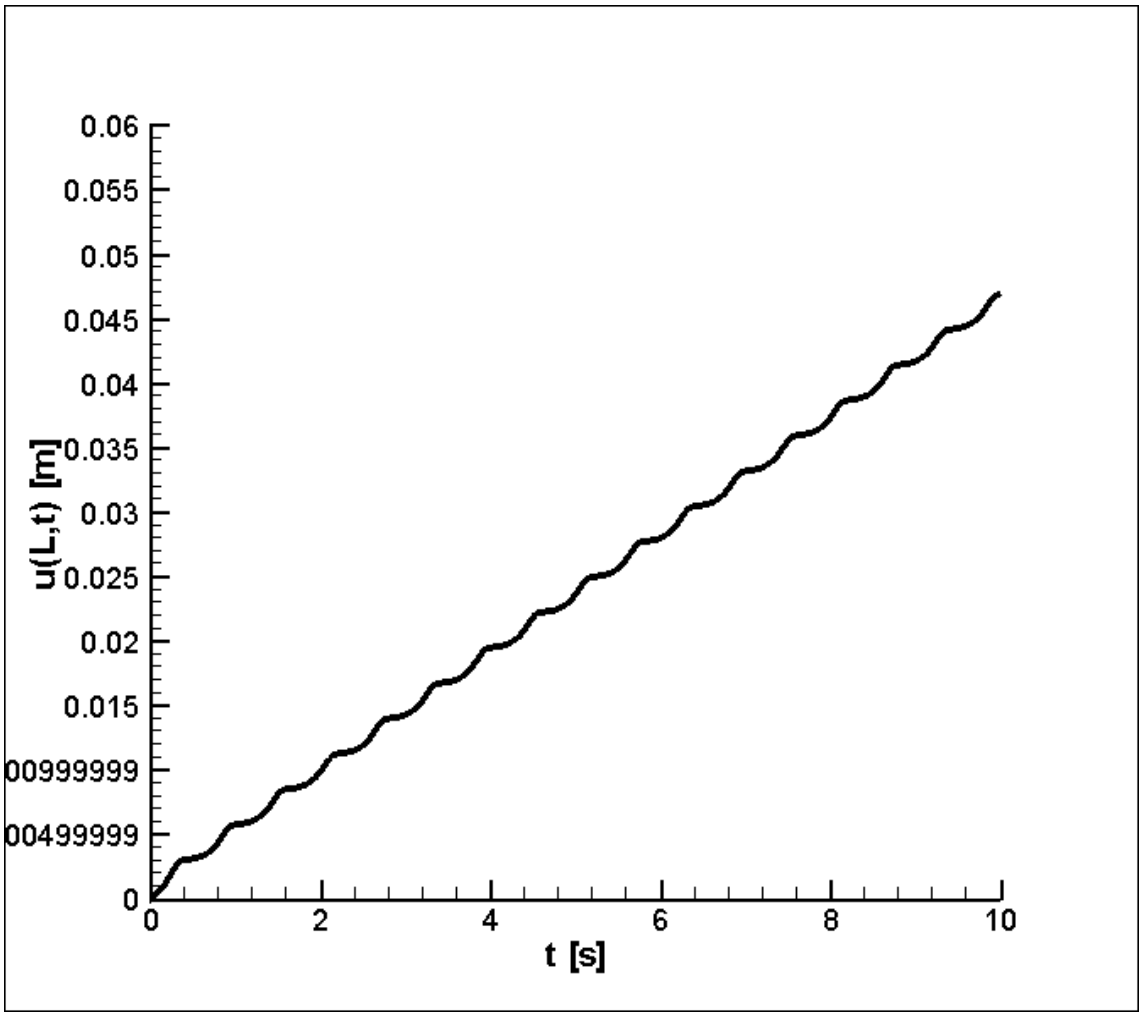


Рисунок 2.8 – Перемещение колонны в точке $x = L$ во времени

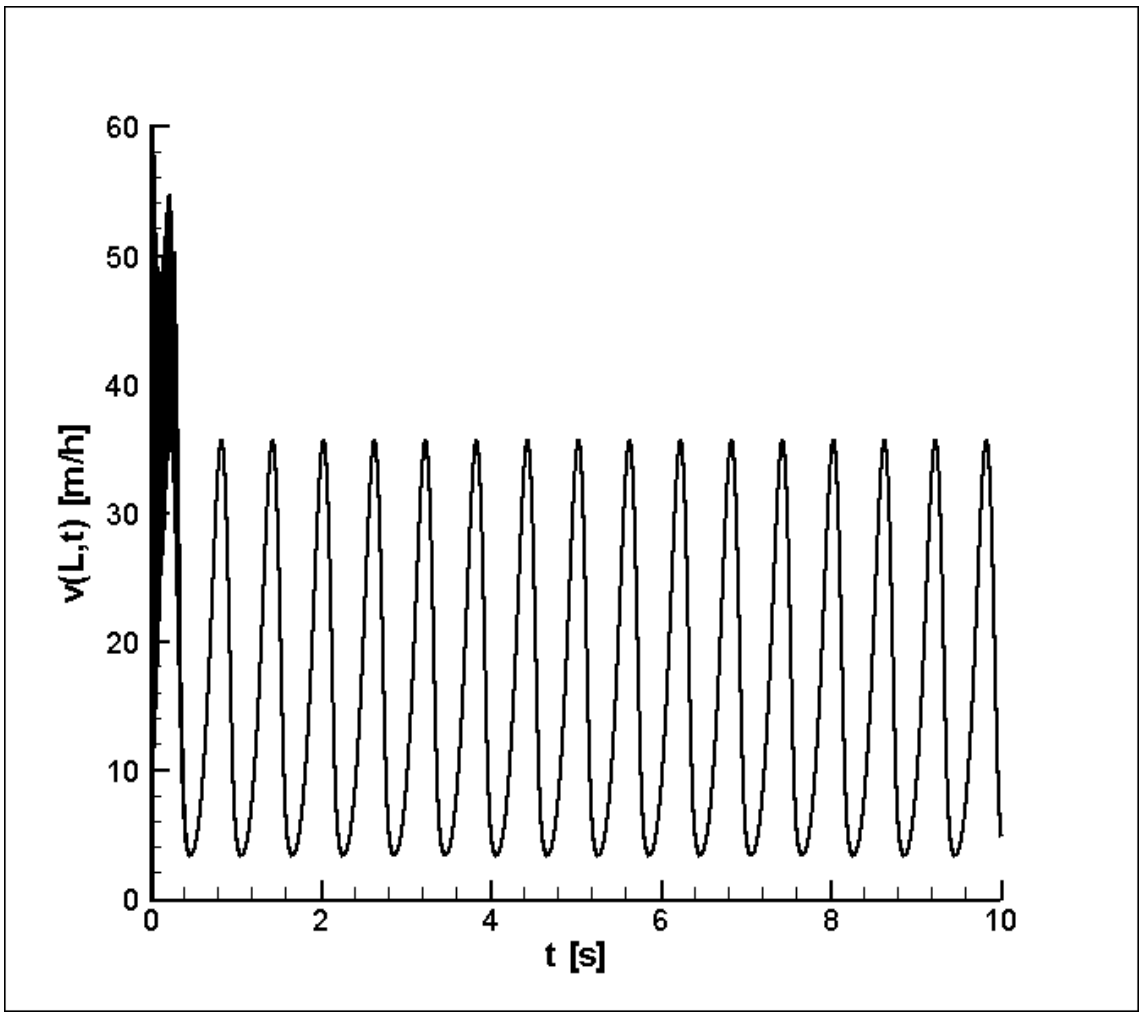


Рисунок 2.9 – Скорость движения бура.

График изменения коэффициента эффективности, определяемого как отношение выходной мощности к входной, представлен на рисунке 2.10. Относительно невысокие значения данного показателя (не более 25 %) обусловлены комплексным учетом внешних факторов: сил контактного трения, реакции забоя (сопротивления разрушаемой породы), гравитационных и постоянных осевых нагрузок.

Верификация с методами, известными в литературе

С целью верификации полученных численных решений и валидации созданного программного комплекса осуществлено сопоставление расчетных данных с результатами, опубликованными в трудах [106] и [101]. В отличие от исследования T.G. Ritto [106], базирующегося на методе конечных элементов, в текущей работе применена модель с сосредоточенными параметрами. При сопоставлении с подходом Khajiyeva L. и Sergaliyev A. [101], также использующих метод сосредоточенных параметров, ключевое различие заключается в программной реализации: вместо среды Wolfram Mathematica (WM) автором использован язык C++ (среда Microsoft Visual Studio).

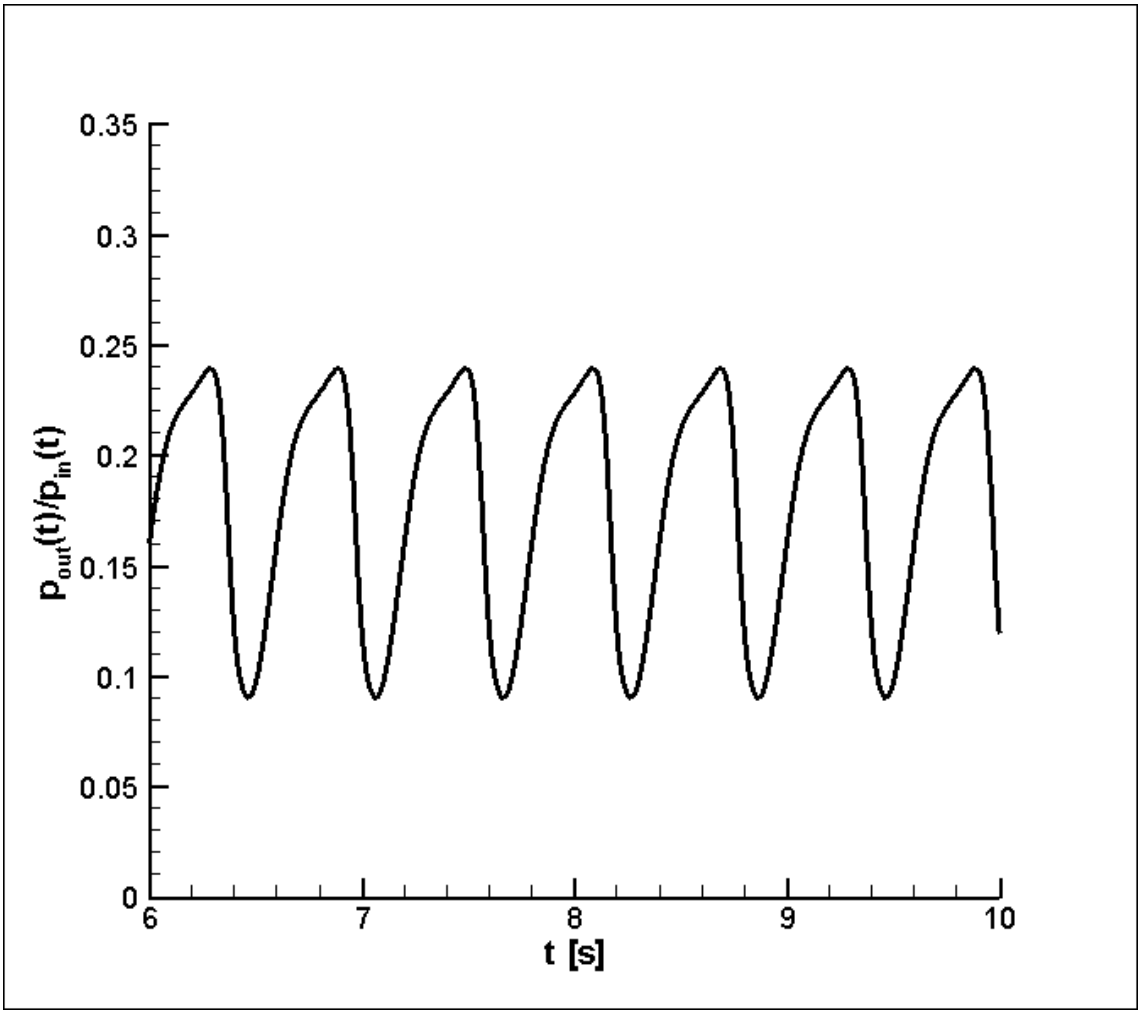


Рисунок 2.10 – Эволюция коэффициента полезного действия долота

С целью проведения верификации графические данные из эталонных работ [101, 106] были оцифрованы в пакете GetData. Последующая визуализация и сравнение с полученными результатами выполнялась в графической среде GnuPlot.

Сравнение продольных перемещений (рисунок 2.11) и скоростей (рисунок 2.12) выявило качественную и количественную сходимость результатов всех трех подходов. Некоторое расхождение наблюдается с результатами Ритто на рисунке 2.11, полученными с использованием метода конечных элементов. Различия могут быть обусловлены особенностями пространственно-временной дискретизации и численной реализации расчетной модели, включая выбор конечных элементов, шага интегрирования и параметров дискретизации. Полное совпадение графиков с результатами работы Сергалиева, а также качественная согласованность с данными Ритто подтверждают применимость метода сосредоточенных параметров для моделирования систем с локальными нагрузками. Аналогичная сходимость наблюдается и для мощностных характеристик (рисунок 2.13).

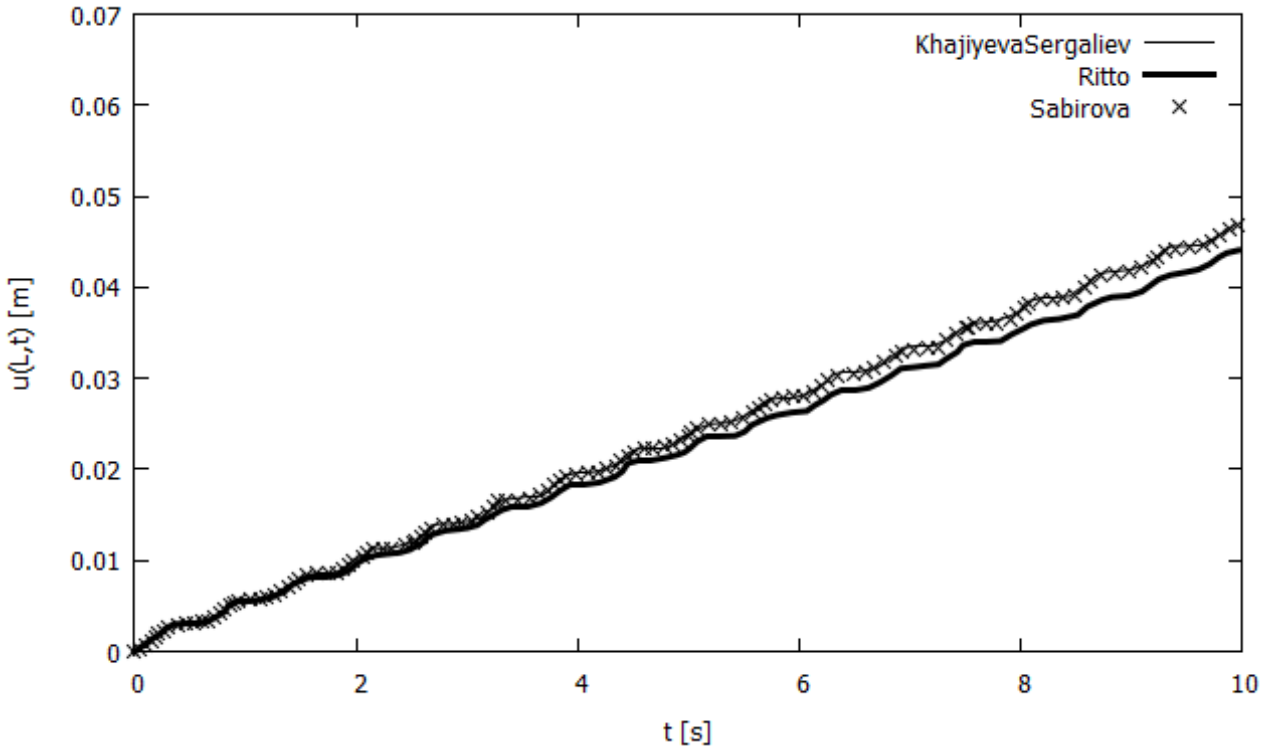


Рисунок 2.11 – Сопоставление расчетных данных продольного перемещения с результатами исследований, представленными в работах [101, 106]

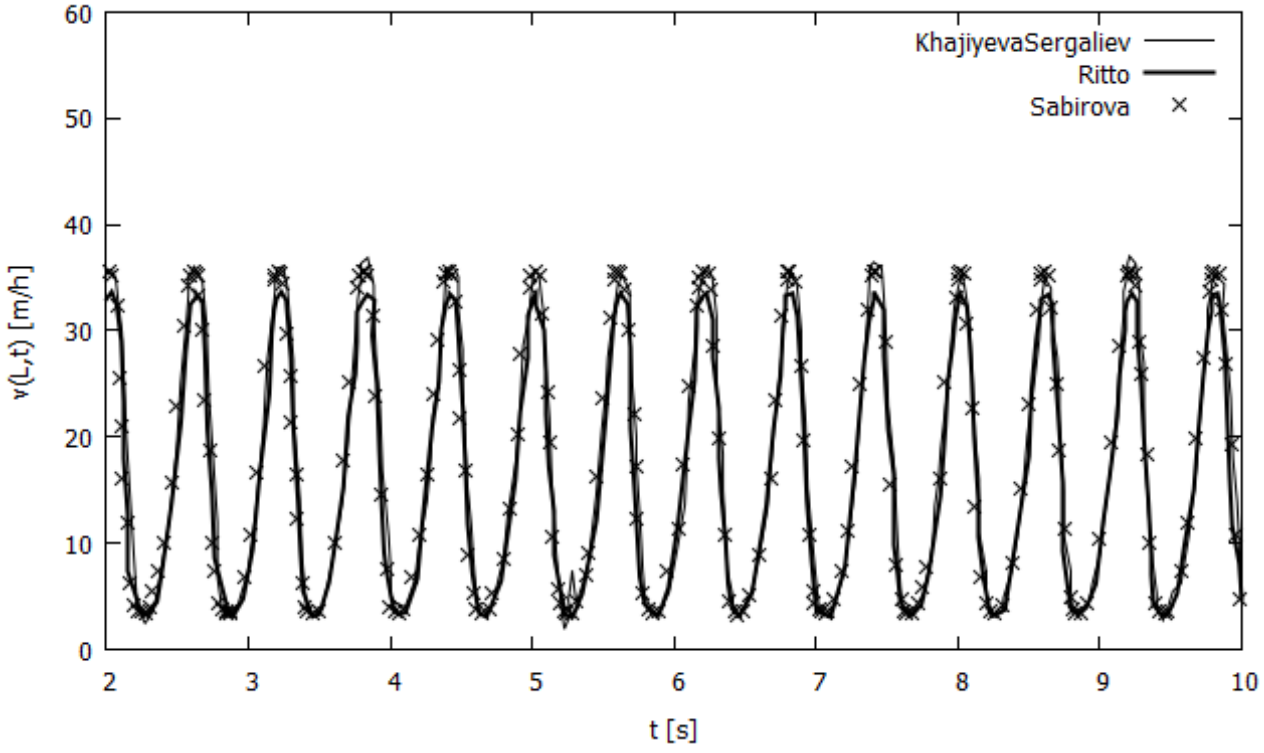


Рисунок 2.12 – Сопоставление расчетных данных скорости движения бура с результатами исследований, представленными в работах [101, 106]

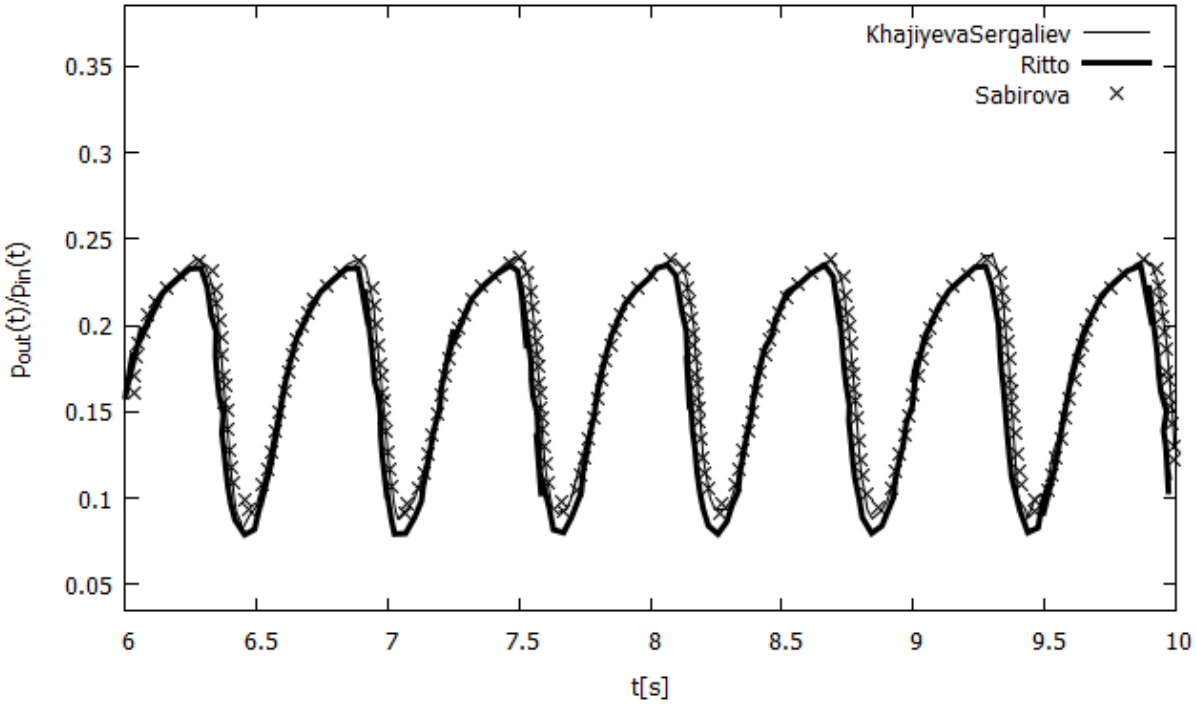


Рисунок 2.13 – Сопоставление расчетных данных динамики КПД бура с результатами исследований, представленными в работах [101, 106]

Точность численного решения напрямую определяется плотностью дискретизации бурильной колонны: при увеличении числа пространственных узлов шаг сетки сокращается, и дискретная модель асимптотически приближается к континуальному представлению (уравнению сплошности). С другой стороны, рост числа разбиений неизбежно влечет за собой увеличение вычислительных затрат, что делает необходимым поиск компромисса между точностью и временем выполнения программного кода. В качестве эталона для оценки погрешности были выбраны результаты T.G. Ritto, впервые рассмотревшего данную модель.

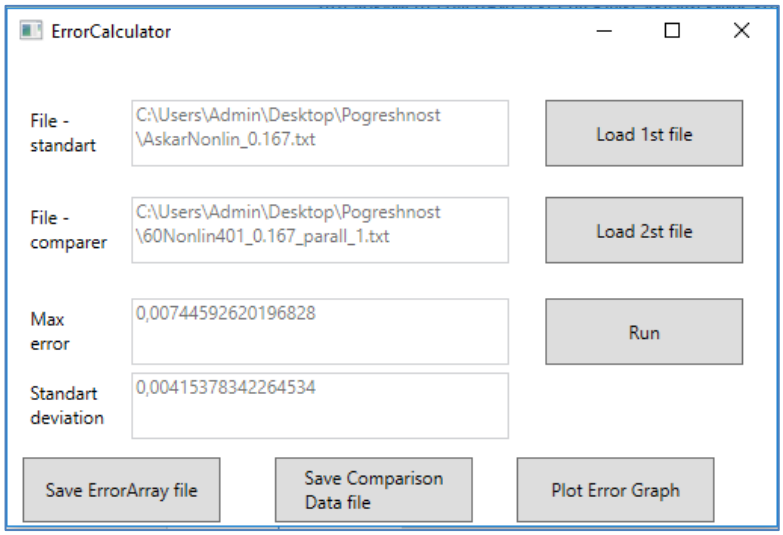


Рисунок 2.14 – Специализированный программный модуль ErrorCalculator для анализа вычислительной погрешности

Сопоставление результатов было автоматизировано посредством разработанного WPF-приложения (рисунок 2.14), исходный код которого написан на языке C# в среде Microsoft Visual Studio. Данный программный инструмент позволяет проводить верификацию путем вычисления разности между загружаемыми данными в синхронизированных временных точках. Точность вычислялась по максимальной ошибке – максимальному абсолютному отклонению между соответствующими значениями точек массивов и средней квадратичной ошибке (MSE – mean squared error), вычисляемым по следующим формулам:

$$\varepsilon_{\max} = \max_{i=1,\dots,N} |x_i - y_i|,$$
$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)^2, \tag{2.35}$$

где N – количество элементов (длина массива), x_i, y_i – соответствующие значения из первого и второго массивов.

Таблица 2.4 – Оценка вычислительной эффективности при варьировании числа расчетных узлов

Количество узлов	Шаг по времени (с)	Время вычисления (с)	Средняя квадратичная ошибка (мм)	Максимальная ошибка (мм)
11	0.0001	0.728	26.511954	47.395575
51	0.0001	2.476	3.434101	6.171475
101	0.0001	4.616	1.557550	2.827275
121	0.0001	5.449	1.261096	2.298475
151	0.00005	14.223	0.983429	1.792193
201	0.00005	17.891	0.699384	1.326110
201	0.00001	87.815	0.707623	1.342810
1001	0.00001	461.987	0.139174	0.392220

Для верификации сеточной независимости численного решения был проведен анализ продольных перемещений бурильной колонны. В таблице 2.4 обобщены данные, отражающие зависимость вычислительной погрешности и затраченного машинного времени от числа узлов дискретизации. Следует учитывать, что расчетная погрешность носит оценочный характер, поскольку на её величину накладываются инструментальные факторы: качество оцифровки референтных графиков, несовпадение временных шагов (в пределах dt) и численная ошибка первоисточника. Тем не менее, полученные данные позволяют обоснованно выбрать параметры модели. Так, при использовании грубой сетки $N = 10$ наблюдается существенная погрешность аппроксимации:

максимальная ошибка достигает 5 см, средняя квадратичная составляет 2,6 см. Уплотнение сетки до 51 узла приводит к снижению погрешности в 7,7 раз, однако сопровождается увеличением вычислительного времени в 3,4 раза. Дальнейшее увеличение узлов сетки до 151 демонстрирует пропорциональное улучшение точности, однако требует адаптации временного шага, что существенно увеличивает вычислительные затраты. Примечательно, что в ряде случаев при разных N показатели точности сопоставимы, в то время как время расчета разнится в 5 раз, что указывает на необходимость теоретического анализа сходимости схемы и связи пространственного и временного шагов. Наилучшая точность (ошибка менее 0,39 мм) достигнута при $N=1000$, однако это требует в 3,4 раза больше времени, чем все остальные расчеты суммарно.

Влияние плотности дискретизации на расчетные значения перемещения проиллюстрировано на рисунке 2.15. При использовании 11 узлов (жирная сплошная линия) наблюдается существенное отклонение от эталонных данных T.G. Ritto (жирная пунктирная линия). С ростом числа разбиений прослеживается четкая тенденция к сходимости графиков с референтной кривой. В частности, при увеличении количества расчетных точек до 1000 результаты становятся визуально идентичными показателям первоисточника, что подтверждает высокую точность модели при данной степени детализации.

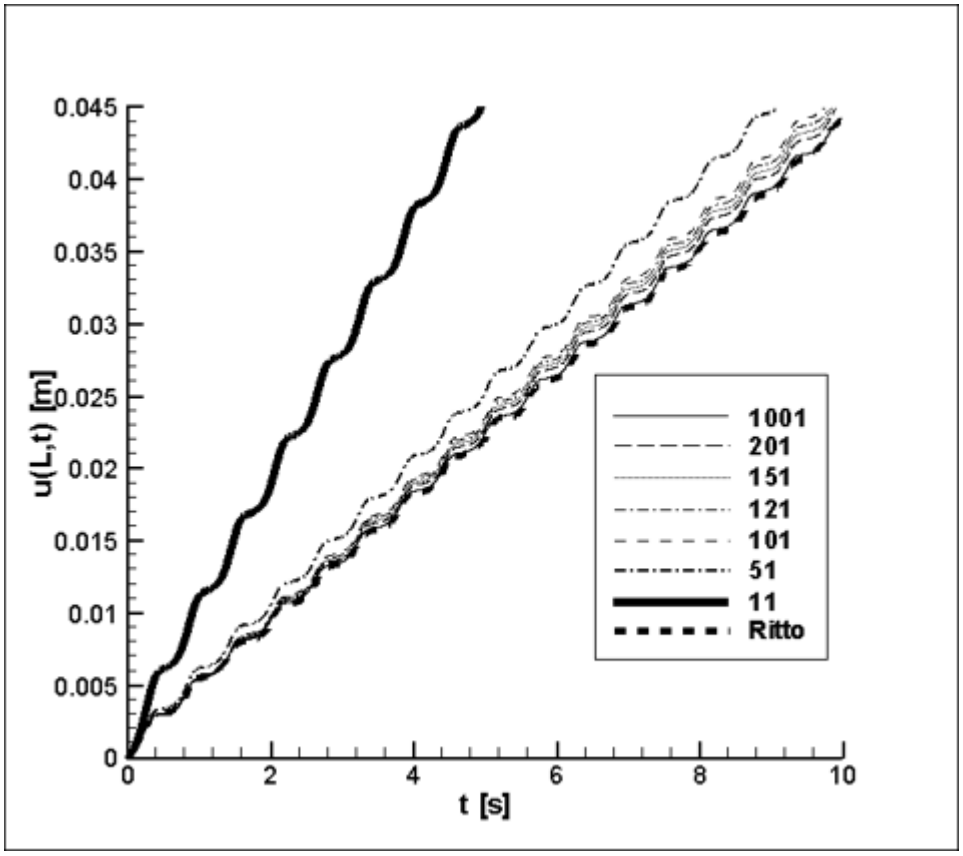


Рисунок 2.15 – Продольные перемещения колонны для различного числа разбиения

Следовательно, выбор числа сегментов разбиения диктуется конкретными задачами, стоящими перед исследователем. На этапах отладки программного обеспечения или для получения первичного представления о качественном поведении системы вполне достаточно дискретизации на 10 элементов. В случаях, когда определяющим фактором является прецизионная точность (при наличии соответствующих вычислительных мощностей), рекомендуется использовать 1000 и более узлов. В рамках данной работы наиболее рациональным компромиссом между быстродействием алгоритма и минимизацией погрешности было признано разбиение колонны на 100-150 расчетных точек.

2.4.2 Моделирование плоских поперечных колебаний бурильной колонны в потоке газа

Следующим этапом было развитие существующего программного комплекса на случай поперечных перемещений бурильной колонны с учетом смешанных частных производных по времени и пространству, требующих предварительных Гауссовых преобразований. Следующим этапом тестирования разработанного комплекса стал анализ математической модели плоских поперечных колебаний бурильной колонны в потоке газа, заимствованной из работы [49]. Соответствующая расчетная схема нагружения проиллюстрирована на рисунке 2.16. Схема нагружения представлена на рисунке 2.16. Проанализируем целесообразность учета геометрической нелинейности, влияние угловой скорости вращения, осевой нагрузки на динамические характеристики бурильной колонны.

Нелинейная математическая модель поперечных вибраций вертикальной бурильной колонны с учетом сверхзвукового газового потока выражается в виде:

$$\begin{aligned}&\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\rho I\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}-\frac{EA}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3-\rho A\Omega^2 u+\\&+\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-hP_0\kappa\left(\bar{M}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\kappa+1}{4}\bar{M}^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\kappa+1}{12}\bar{M}^3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3\right)=0,\end{aligned}\tag{2.36}$$

где $u(x,t)$ – поперечное перемещение оси бурильной колонны, I – осевой момент инерции площади кольцевого сечения трубы, $N(x,t)$ – продольная осевая нагрузка, ν – коэффициент Пуассона материала колонны, Ω – угловая скорость вращения колонны, κ – показатель политропы газа, $\bar{M}$ – число Маха, P_0 – гидростатическое давление невозмущенного потока газа, h – толщина стенок бурильной трубы.

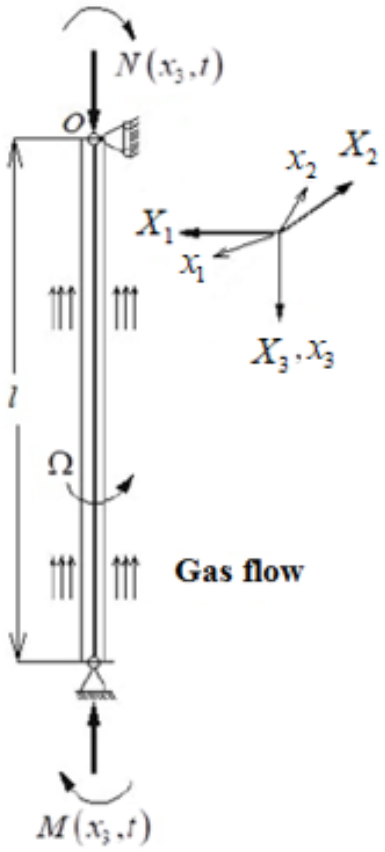


Рисунок 2.16 – Схема нагружения колонны [49]

Первое слагаемое в уравнении движения является инерционным, второе слагаемое характеризует сопротивление колонны изгибу, третье слагаемое учитывает вращательную инерцию поперечных сечений (появляется при учете угловой скорости вращения), четвертое слагаемое – вклад продольной силы $N(x,t)$, далее идет нелинейное слагаемое вследствие учета геометрической нелинейности, шестой член учитывает влияние вращения конструкции на движение (центробежную силу), далее идут слагаемые от влияния потока газа.

Граничные условия для стержня длиной L запишем в виде:

$$\begin{aligned} &u(0,t)=0, \quad u(L,t)=0, \\ &EI\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}=0, \quad EI\frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x^2}=0. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Начальные условия представим в виде:

$$u(x,0)=0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=C_1, \quad 0<x<L, \tag{2.38}$$

где C_1 – постоянная, равная скорости отклонения стержня от исходного положения в начальный момент времени.

Чтобы обосновать целесообразность использования нелинейного подхода и оценить эффективность метода сосредоточенных параметров (МСП) для подобных задач, проведено сопоставление с геометрически линейной моделью. В этой упрощенной постановке нелинейное слагаемое $-\frac{EA}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3$ исключается (принимается равным нулю), однако сохраняется нелинейная составляющая, характеризующая воздействие газового потока, для сравнения влияния геометрической нелинейности на устойчивость численного решения. Уравнение (2.36) принимает вид:

$$\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\rho I\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\rho A\Omega^2 u-$$
$$-hP_0\kappa\left(\bar{M}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\kappa+1}{4}\bar{M}^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\kappa+1}{12}\bar{M}^3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3\right)=0, \tag{2.39}$$

с аналогичными граничными условиями (2.37) и начальными условиями (2.38).

Для численного решения моделей применим МСП. Обезразмерим систему с помощью метрик (далее опустим знак $\sim$ для удобства):

$$u=L\tilde{u},\quad x=L\tilde{x},\quad t=\frac{\tilde{t}}{c},\quad c=\sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}. \tag{2.40}$$

Положим нагрузку $N(x,t)$ постоянной, обозначим $\bar{N}$. После обезразмеривания система примет вид (знак тильды опущен для простоты):

$$\rho ALc^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{EI}{L^3}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\frac{\rho Ic^2}{L}\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}+\bar{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{3EA}{(1-\nu)L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-$$
$$-\rho A\Omega^2 Lu-hP_0\kappa\left(\bar{M}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\kappa+1}{4}\bar{M}^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\kappa+1}{12}\bar{M}^3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3\right)=0. \tag{2.41}$$

Граничные условия примут вид:

$$u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0,$$
$$\frac{EI}{L}\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}=0,\quad \frac{EI}{L}\frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x^2}=0. \tag{2.42}$$

Начальные условия в безразмерных величинах запишутся:

$$u(x,0)=0,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\frac{C_1}{Lc},\quad 0<x<L. \tag{2.43}$$

После дискретизации разностными формулами из приложения А (А.4), система принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\rho ALc^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j+\frac{EI}{L^3}\left(\frac{u_{j-2}-4u_{j-1}+6u_j-4u_{j+1}+u_{j+2}}{l^4}\right)-\\
&-\frac{\rho Ic^2}{l^2L}\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{j+1}-2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{j-1}\right)+\bar{N}\left(\frac{u_{j-1}-2u_j+u_{j+1}}{l^2}\right)-\\
&-\frac{3EA}{(1-\nu)L}\left(\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2l}\right)^2\left(\frac{u_{j-1}-2u_j+u_{j+1}}{l^2}\right)-\rho A\Omega^2 Lu_j-\\
&-hP_0\kappa\left(\bar{M}\left(\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2l}\right)-\frac{\kappa+1}{4}\bar{M}^2\left(\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2l}\right)^2+\frac{\kappa+1}{12}\bar{M}^3\left(\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2l}\right)^3\right)=0,
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$u_0=0,\quad u_{N-1}=0, \tag{2.45}$$

$$\frac{EI}{L}\frac{u_0-2u_1+u_2}{l^2}=0,\quad \frac{EI}{L}\frac{u_{N-3}-2u_{N-2}+u_{N-1}}{l^2}=0, \tag{2.46}$$

$$t=0:\quad u=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{C_1}{Lc}, \tag{2.47}$$

где N – количество точек разбиения стержня, $j=2,...,N-3$, l – пространственный шаг расчетной сетки, вычисляется по формуле (2.18), $u_j=u(x_j,t)$.

В соответствии с краевыми условиями (2.45), начальные ускорения на границах расчетной области принимаются равными нулю. Для приграничных узлов сетки $j=1,N-2$ уравнения ускорения формируются с использованием следующей конечно-разностной аппроксимации:

$$\frac{\partial^2 u_j^n}{\partial t^2}=\frac{u_j^{n-1}-2u_j^n+u_j^{n+1}}{\Delta t^2}, \tag{2.48}$$

где $u_j^n=u(x_j,t_n)$.

Из граничных условий (2.46) получим $u_1^{n+1}+u_1^{n-1}\approx 2u_1^n=u_2^n$. Таким образом, в точках $j=1,N-2$ ускорения равны:

$$\frac{\partial^2 u_1^n}{\partial t^2} = \frac{u_2^n - 2u_1^n}{\Delta t^2},$$
$$\frac{\partial^2 u_{N-2}^n}{\partial t^2} = \frac{u_{N-3}^n - 2u_{N-2}^n}{\Delta t^2}. \tag{2.49}$$

Запишем конечную формулу дискретной системы колебаний:

$$j = 0: \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_0 = 0, \quad j = 1: \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_1 = Lc^2 \frac{u_2 - 2u_1}{\Delta t^2}, \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned} &j = \overline{2, N-3}: \quad \rho A L c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j + \frac{EI}{L^3}\left(\frac{u_{j-2} - 4u_{j-1} + 6u_j - 4u_{j+1} + u_{j+2}}{l^4}\right) - \\ &- \frac{\rho I c^2}{l^2 L}\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{j+1} - 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{j-1}\right) + \bar{N}\left(\frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{l^2}\right) - \\ &- \frac{3EA}{(1-\nu)L}\left(\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2l}\right)^2 \left(\frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{l^2}\right) - \rho A \Omega^2 L u_j - \\ &- hP_0\kappa\left(\bar{M}\left(\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2l}\right) - \frac{\kappa+1}{4}\bar{M}^2\left(\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2l}\right)^2 + \frac{\kappa+1}{12}\bar{M}^3\left(\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2l}\right)^3\right) = 0, \end{aligned} \tag{2.51}$$

$$j = N-2: \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{N-2} = Lc^2 \frac{u_{N-3} - 2u_{N-2}}{\Delta t^2}, \quad j = N-1: \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{N-1} = 0, \tag{2.52}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &u_0 = 0, \quad u_{N-1} = 0, \\ &\frac{EI}{L}\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{l^2} = 0, \quad \frac{EI}{L}\frac{u_{N-3} - 2u_{N-2} + u_{N-1}}{l^2} = 0, \end{aligned} \tag{2.53}$$

и начальными

$$t = 0: \quad u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{C_1}{Lc}. \tag{2.54}$$

Для решения данной системы методом Рунге-Кутта 4-го порядка, перенесем все члены, кроме ускорения, в левую сторону:

$$
\begin{aligned}
&j=\overline{2,N-3}: \quad -\frac{\rho I c^2}{l^2 L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{j-1}+\rho c^2 L\left(A+\frac{2I}{l^2L^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{j}-\frac{\rho I c^2}{l^2 L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{j+1}= \\
&=-\frac{EI}{L^3}\left(\frac{u_{j-2}-4u_{j-1}+6u_j-4u_{j+1}+u_{j+2}}{l^4}\right)-\bar{N}\left(\frac{u_{j-1}-2u_j+u_{j+1}}{l^2}\right)+ \\
&+\frac{3EA}{(1-\nu)L}\left(\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2l}\right)^2\left(\frac{u_{j-1}-2u_j+u_{j+1}}{l^2}\right)+\rho A\Omega^2 L u_j+ \\
&+hP_0\kappa\left(\bar{M}\left(\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2l}\right)-\frac{\kappa+1}{4}\bar{M}^2\left(\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2l}\right)^2+\frac{\kappa+1}{12}\bar{M}^3\left(\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2l}\right)^3\right).
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

Для решения полученной системы применим алгебраические преобразования типа Гаусса. После преобразований система примет вид:

$$
\begin{aligned}
&j=0: \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_0=0, \quad j=1: \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_1=k_1 L c^2\frac{u_2-2u_1}{\Delta t^2}, \\
&j=\overline{2,N-3}: \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j=k_j\left[-\frac{EI}{L^3}\left(\frac{u_{j-2}-4u_{j-1}+6u_j-4u_{j+1}+u_{j+2}}{l^4}\right)-\right. \\
&-\bar{N}\left(\frac{u_{j-1}-2u_j+u_{j+1}}{l^2}\right)+ \\
&+\frac{3EA}{(1-\nu)L}\left(\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2l}\right)^2\left(\frac{u_{j-1}-2u_j+u_{j+1}}{l^2}\right)+\rho A\Omega^2 L u_j+ \\
&\left.+hP_0\kappa\left(\bar{M}\left(\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2l}\right)-\frac{\kappa+1}{4}\bar{M}^2\left(\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2l}\right)^2+\frac{\kappa+1}{12}\bar{M}^3\left(\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2l}\right)^3\right)\right], \\
&j=N-2: \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{N-2}=k_{N-2}Lc^2\frac{u_{N-3}-2u_{N-2}}{\Delta t^2}, \quad j=N-1: \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{N-1}=0,
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

с граничными условиями (2.53) и начальными (2.54).

Детали численной реализации и результаты исследования

Программный модуль был расширен с добавлением блока предварительных преобразований трехдиагональной матрицы методом Гаусса-Жордана. Физико-геометрические характеристики бурильной колонны и параметры действующих нагрузок приняты идентичными тем, что использовались авторами в работе [49]: $E=210\,\text{ГПа}$, $\rho=7800\,\text{кг/м}^3$, $I=6.84\times10^{-5}\,\text{м}^4$, $d_1=0.12\,\text{м}$ (внутренний диаметр), $d_2=0.2\,\text{м}$ (внешний

диаметр), $\nu = 0.28$, $P_0 = 1.013 \times 10^3$ Па, $\bar{N} = 2.2 \times 10^3$ Н, $\bar{M} = 2.5$, $\kappa = 1.4$, $A = 2.01 \times 10^{-2}$ м^2, $h = 0.04$м, $L = 100$ м, $f_{sta} = 5500$Н, $F_0 = 550$Н.

Исследование динамики системы в линейной и нелинейной постановках выполнялось при различных значениях угловой скорости вращения в интервале $\Omega = 0.083$рад/с – $\Omega = 0.33$рад/с, а также при разных параметрах пространственной дискретизации и величинах временного шага.

Сечение $0.49L$ было выбрано для анализа как наиболее информативное, поскольку амплитуда поперечных колебаний стержня достигает своего пика в середине и затухает по направлению к его краям.

Вычисленные поперечные перемещения при варьировании угловой скорости вращения представлены на 2.17-2.19, где сплошные линии соответствуют решениям геометрически нелинейной задачи, а штриховые – линейной постановке. В частности, на рисунках 2.17-2.19 выполнено сопоставление результатов при $N = 101, \Delta t = 0.00005$ для нелинейной и $N = 1001, \Delta t = 0.00001$ для линейной постановок, на рисунке 2.19 представлены результаты при $N = 101, \Delta t = 0.00005$ для линейной и нелинейной постановок.

Анализ полученных зависимостей свидетельствует о том, что во всем рассмотренном диапазоне скоростей нелинейная модель дает более низкие значения амплитуд и меньшие периоды колебаний по сравнению с линейным аналогом.

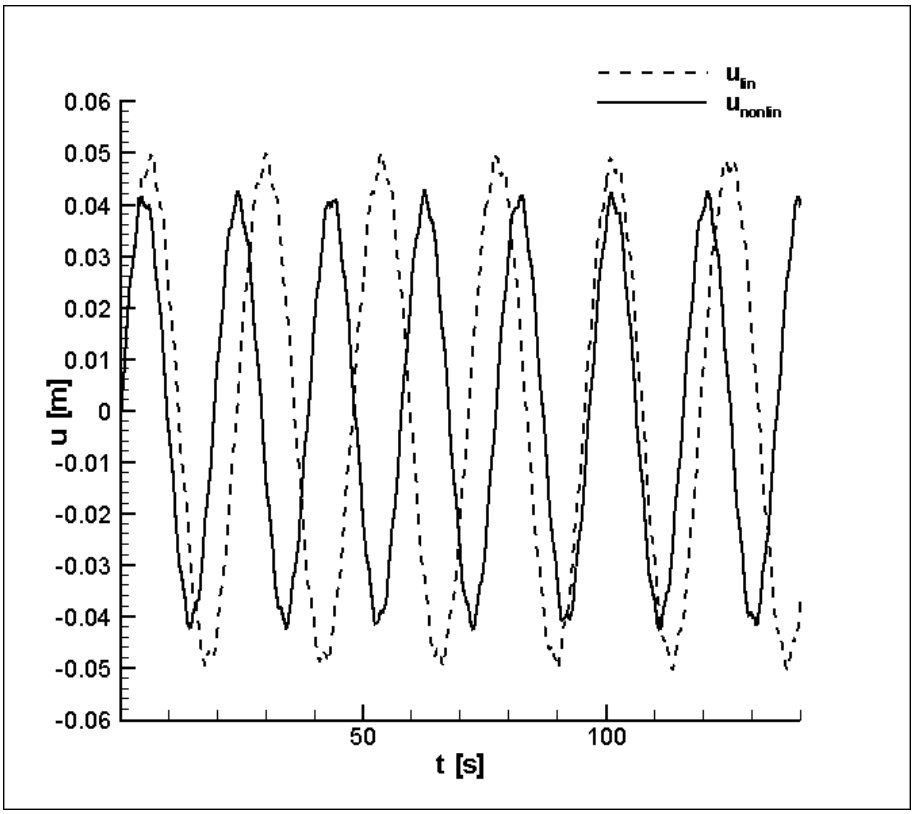


Рисунок 2.17 – Динамика поперечных перемещений бурильной колонны при $\Omega = 0.083$рад/с

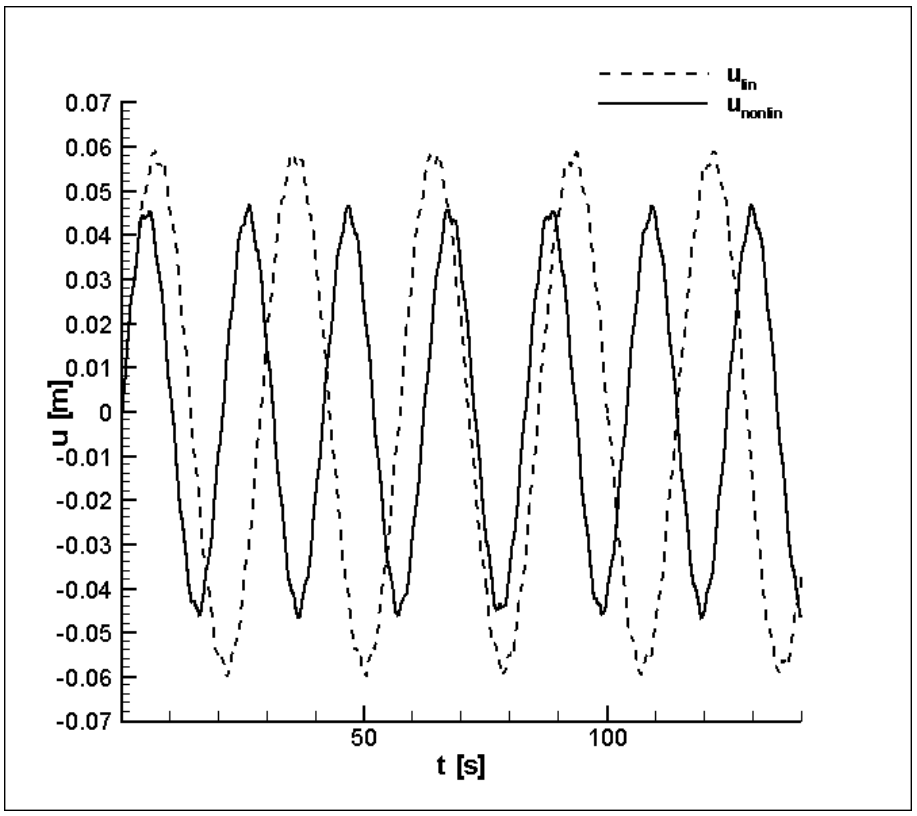


Рисунок 2.18 – Динамика поперечных перемещений бурильной колонны при $\Omega = 0.167$ рад/с

Примечательно, что в области малых скоростей вращения ($\Omega = 0.083$ рад/с и $\Omega = 0.167$ рад/с) качественные и количественные расхождения незначительны (рисунки 2.17-2.18). В то же время рост скорости вращения приводит к существенному расхождению результатов: так, при достижении $\Omega = 0.25$ рад/с амплитудные значения различаются двукратно (рисунок 2.19). Принципиальное расхождение результатов фиксируется при достижении угловой скорости значения $\Omega = 0.33$рад/с (рисунок 2.20). На данном режиме линейная демонстрирует потерю динамической устойчивости, что выражено в неограниченном росте амплитуды. В противоположность этому нелинейная постановка обеспечивает сохранение стабильного колебательного процесса.

Анализ представленных результатов обосновывают целесообразность перехода к нелинейным моделям при расчете буровых систем, так как они обеспечивают более высокую точность и устойчивость к варьированию внешних параметров. Также выявлено прямое влияние угловой скорости на динамику колонны: её рост приводит к соразмерному увеличению периода и амплитуды перемещений.

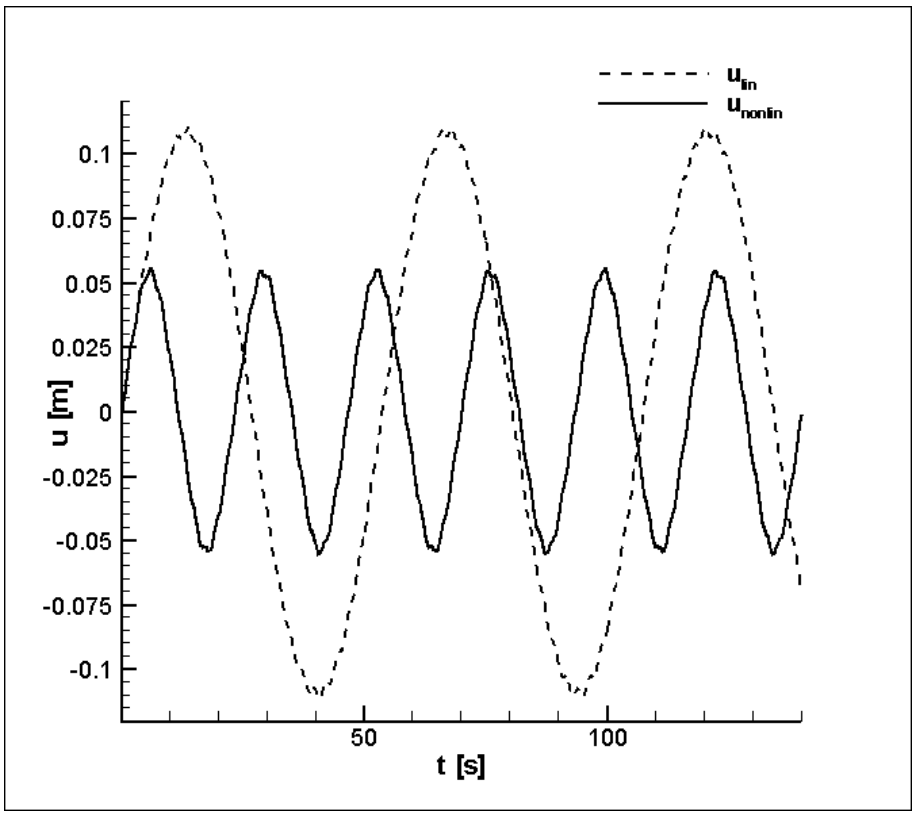


Рисунок 2.19 – Динамика поперечных перемещений бурильной колонны при $\Omega = 0.25$ рад/с

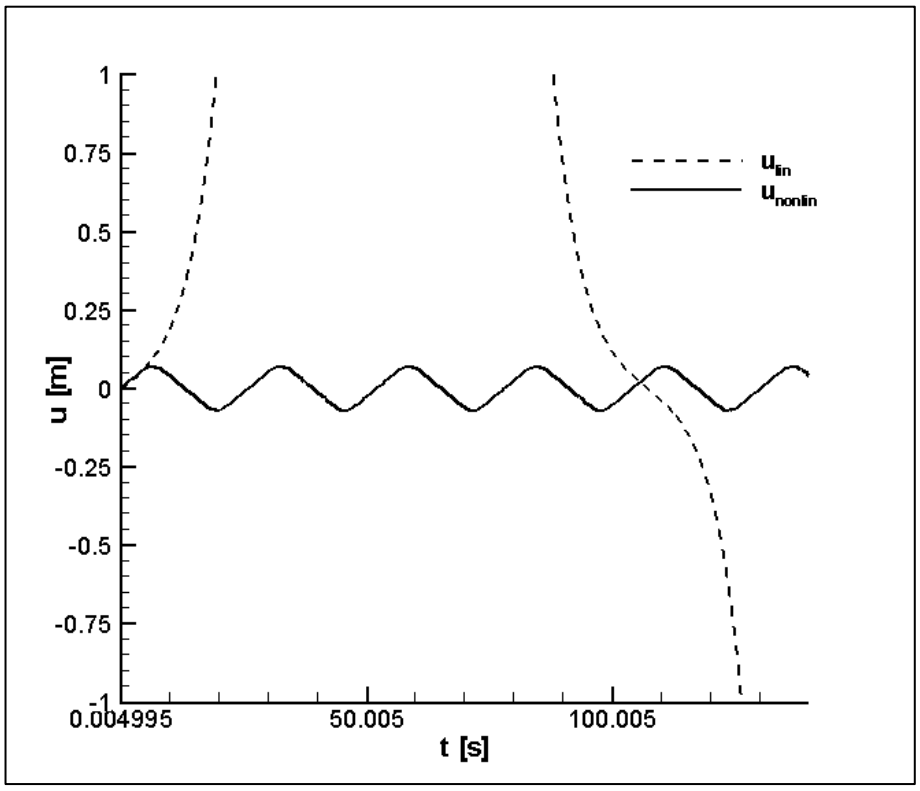


Рисунок 2.20 – Динамика поперечных перемещений бурильной колонны при $\Omega = 0.33$ рад/с

Верификация программного комплекса: сравнение результатов с известными в литературе

В таблице 2.5 приведены данные сопоставления результатов линейного моделирования с оцифрованными значениями из исследования Kudaibergenov A.K. [49]. В представленной таблице отражены временные затраты на расчет, а также такие метрики точности, как средняя квадратичная ошибка и максимальное абсолютное отклонение (2.36), в зависимости от параметров временной и пространственной дискретизации. При минимальной плотности сетки (11 узлов) фиксируется значительная погрешность; по мере увеличения точек разбиения наблюдается рост точности, сопряженный с увеличением вычислительной нагрузки. Стоит подчеркнуть, что использование методов параллельного программирования позволило существенно оптимизировать временные издержки, что сделало возможным проведение серии тестов на высокоплотных сетках с малым временным шагом.

В частности, при использовании 51 узла вместо 11 (при фиксированном числе итераций) зафиксировано 1,6-кратное снижение максимальной и средней квадратичной ошибок, в то время как длительность вычислений возросла в 3,4 раза (с 6,6 до 22,5 с). Дальнейшее увеличение плотности сетки до 101 точки обеспечило улучшение показателей точности в 2,83 раза (по максимальной ошибке) и в 2,62 раза (по СКО) при росте времени счета до 75,9 с. В области высокой дискретизации, требующей адаптации временного шага для обеспечения сходимости, наблюдается эффект «насыщения»: разница в точности между 1001 и 201/401 узлами составляет лишь несколько миллиметров (от 1,92 до 10,4 мм), тогда как вычислительные затраты возрастают в 86,4 и 45,9 раз соответственно. Подобная динамика указывает на нерациональность применения сверхплотных сеток (например, 10001 узел). В результате оптимальным по критерию «точность – время» для линейной модели было признано разбиение на 201 сегмент.

Таблица 2.5 – Оценка погрешности линейной модели при $\Omega = 0.167$ рад/с

Количество узлов	Шаг по времени (с)	Время вычисления (с)	Средняя квадратичная ошибка (мм)	Максимальная ошибка (мм)
11	0.0001	6,6	42,287039	90,425118
31	0.0001	16,94	37,017823	79,332706
51	0.0001	22,5	27,012774	55,285273
101	0.0001	75,9	16,087694	31,893497
201	0.00005	178,1	9,870347	20,805119
401	0.00005	335,6	6,640132	14,310317
1001	0.000005	15390,6	4,721098	10,370317

Таблица 2.6 – Оценка погрешности нелинейной модели при $\Omega = 0.167$ рад/с

Количество узлов	Шаг по времени (с)	Время вычисления (с)	Средняя квадратичная ошибка (мм)	Максимальная ошибка (мм)
11	0.0001	7,6	36,065124	77,038395
31	0.0001	16,91	12,773733	24,434618
51	0.0001	28,2	8,446627	15,527359
101	0.0001	81,9	5,739403	9,874326
201	0.00005	197,6	4,643211	8,479916
401	0.00005	366,6	4,153783	7,445926
1001	0.000005	15494,6	3,894868	7,196737

Учитывая превосходство нелинейной постановки в скорости сходимости, была проведена детальная верификация её точности. В таблице 2.6 приведены показатели погрешности нелинейной модели в зависимости от параметров пространственно-временной дискретизации. Наблюдаемая динамика идентична результатам из таблицы 2.5: приращение числа расчетных узлов минимизирует ошибку, но увеличивает длительность вычислений. Тем не менее, существует порог, после которого дальнейшее измельчение сетки не дает значимого выигрыша в точности, что делает неоправданным чрезмерный рост вычислительных затрат. Для нелинейной задачи оптимальным признано разбиение на 101 узел, что вдвое меньше аналогичного показателя для линейной модели. Данный факт служит дополнительным доказательством более эффективной сходимости нелинейных алгоритмов.

Иллюстрация влияния числа сегментов разбиения на точность воспроизведения расчетных значений изгибных перемещений к эталонным показателям представлена на рисунках 2.21 (линейная модель) и 2.22 (нелинейная модель).

На графиках представлено перемещение точки серединного сечения с течением времени. Использование различных типов линий позволяет проследить динамику изменений при варьировании количества расчетных узлов. Визуальный анализ подтверждает, что последовательное измельчение сетки обеспечивает постепенное совмещение расчетных графиков с референтными результатами.

Проведено сопоставление расчетных показателей с результатами докторской диссертации Кудайбергенова А.К. [49]. Методологическое различие заключается в том, что в первоисточнике [49] применялся метод Бубнова-Галеркина, реализованный в среде Wolfram Mathematica, тогда как в настоящей работе использован метод сосредоточенных параметров (МСП), программно реализованный на языке C++. Процедура сравнения включала оцифровку графиков [49] с помощью GetData и последующее построение совмещенных кривых в пакете Tecplot.

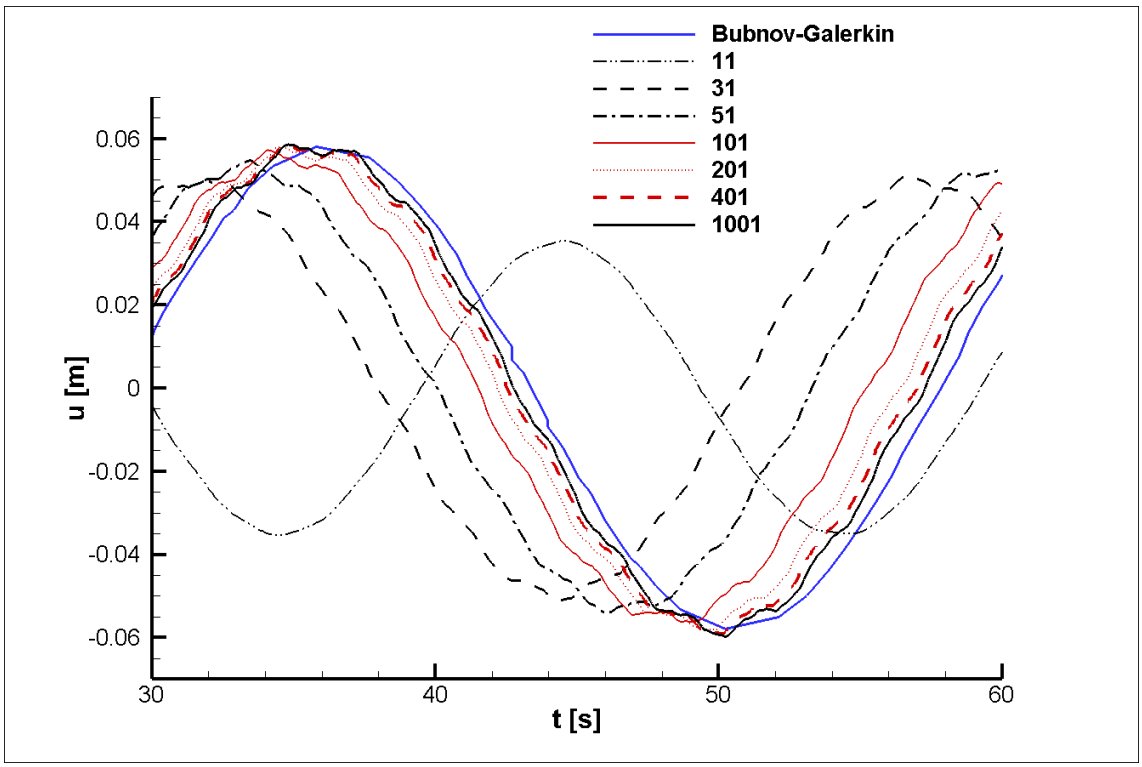


Рисунок 2.21 – Зависимость перемещений буровой штанги от густоты расчетной сетки для линейной постановки, $\Omega = 0.167$ рад/с

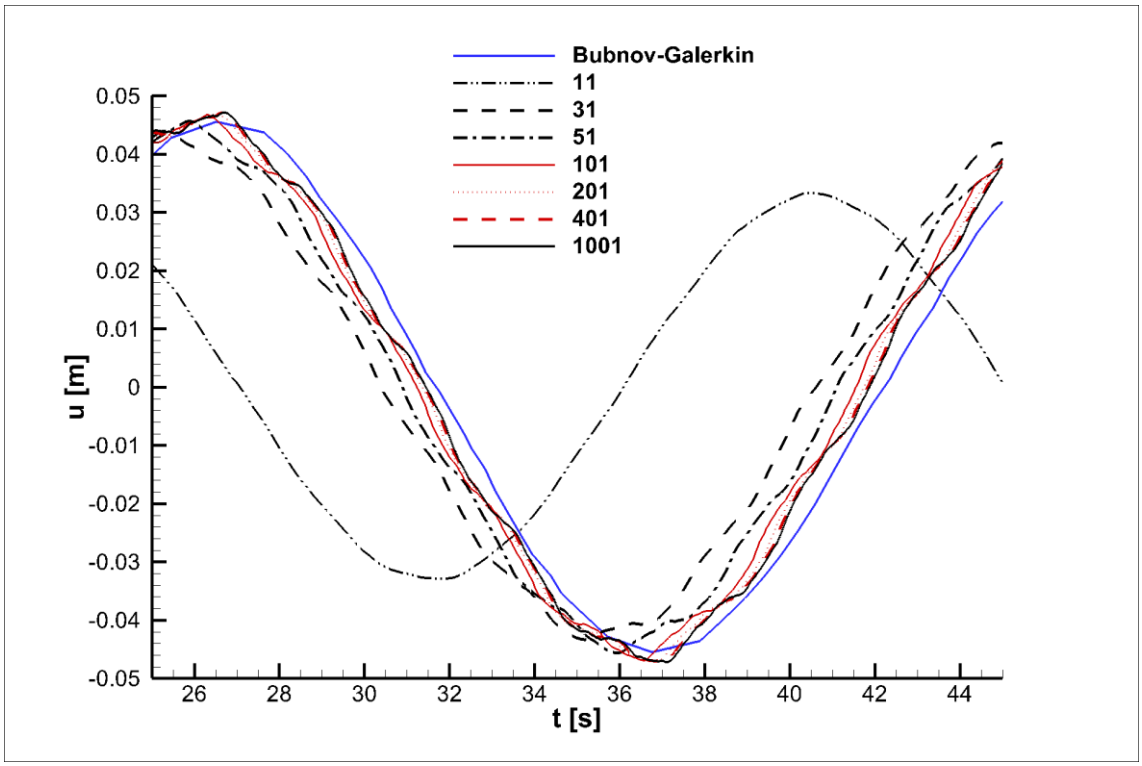


Рисунок 2.22 – Зависимость перемещений буровой штанги от густоты расчетной сетки для нелинейной постановки, $\Omega = 0.167$ рад/с

На рисунках 2.23-2.26 проиллюстрирована динамика поперечных смещений бурильной колонны при варьировании угловой скорости в диапазоне от $0.083\,\text{рад/с}$ до $0.33\,\text{рад/с}$ для линейных и нелинейных моделей. На рисунках 2.23-2.26 линейные зависимости автора данного исследования (2) обозначены черными линиями, а результаты Кудайбергенов А. (1) – красными. Для линейных и нелинейных моделей результаты (2) и (1) проиллюстрированы сплошной и пунктирной линиями соответственно. Анализ рисунков 2.23-2.24 подтверждает высокую точность сходимости: на интервале до 0,5 с графики практически совпадают, обнаруживая лишь незначительные расхождения на более поздних этапах. Однако на рисунке 2.25 зафиксировано явное различие линейных решений, в то время как нелинейная модель сохраняет абсолютную сходимость на всем временном промежутке.

Стоит учесть, что достижение сходимости линейной модели потребовало значительно более высокой плотности пространственной дискретизации: если нелинейная модель (рисунки 2.23-2.25) успешно рассчитывалась при $N = 101, \Delta t = 0.00005$, то для линейной пришлось увеличить число узлов до $N = 1001, \Delta t = 0.00001$.

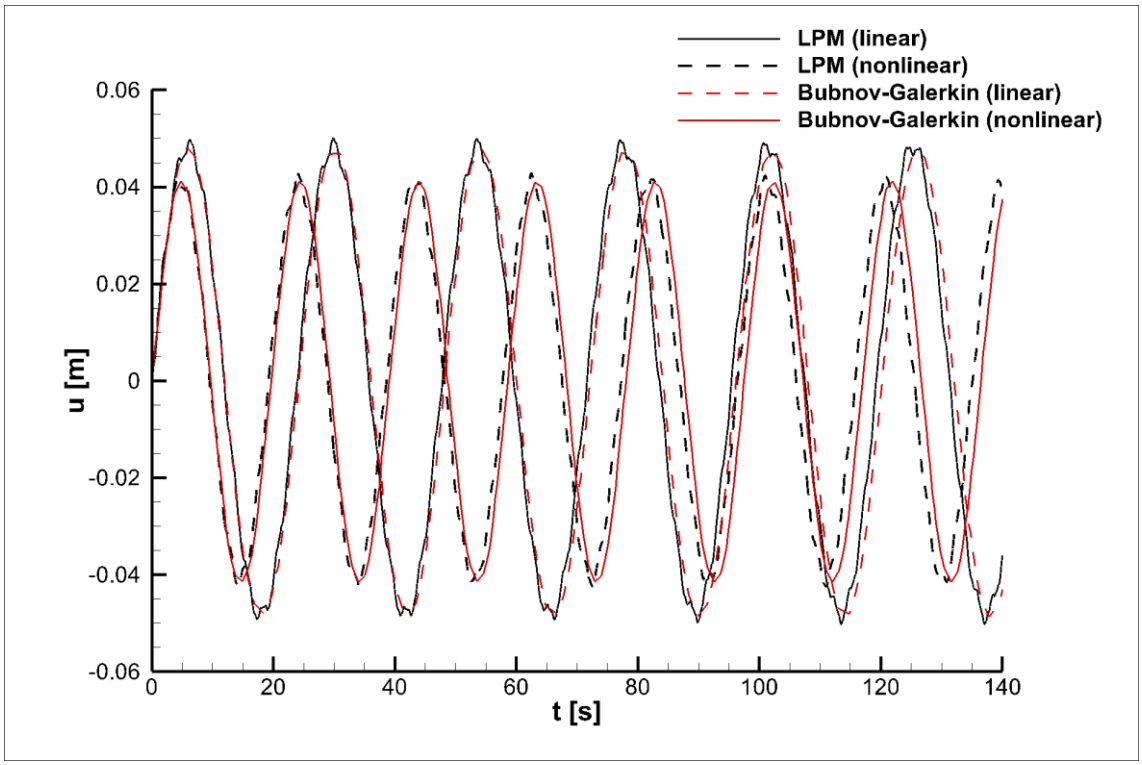


Рисунок 2.23 – Сравнение расчетов при $\Omega = 0.083\,\text{рад/с}$ с результатами в [49]

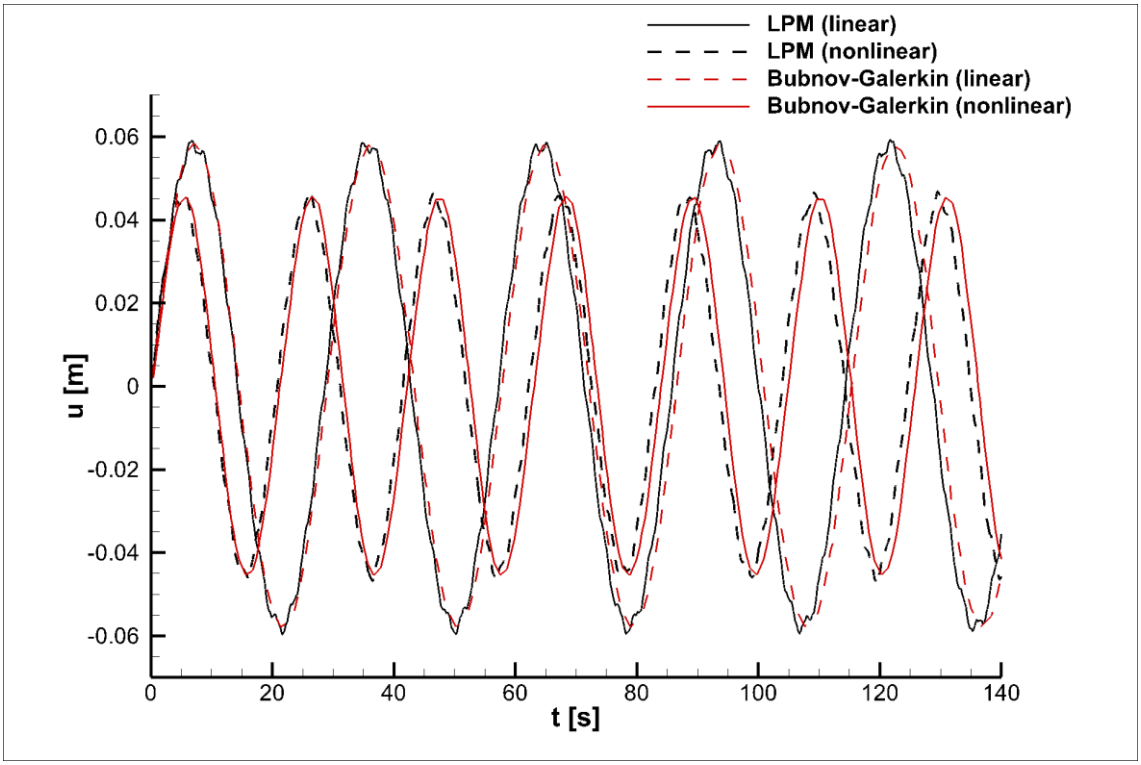


Рисунок 2.24 – Сравнение расчетов при $\Omega = 0.167$ рад/с с результатами в [49]

На рисунке 2.26, вследствие неограниченного роста амплитуды и общей потери устойчивости линейного решения, параметры разбиения для обоих случаев были приняты равными ($N = 101, \Delta t = 0.00005$). Этим объясняется отчетливое визуальное расхождение между данными автора (2) и эталонными результатами (1) в линейной постановке.

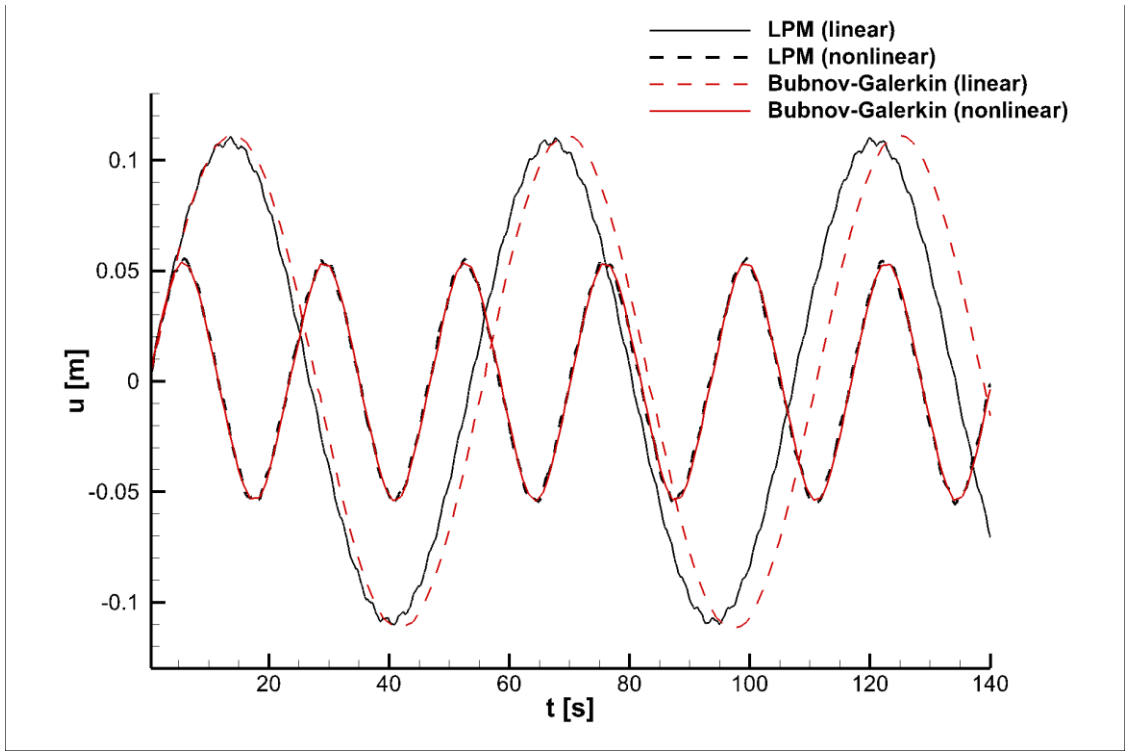


Рисунок 2.25 – Сравнение расчетов при $\Omega = 0.25$ рад/с с результатами в [49]

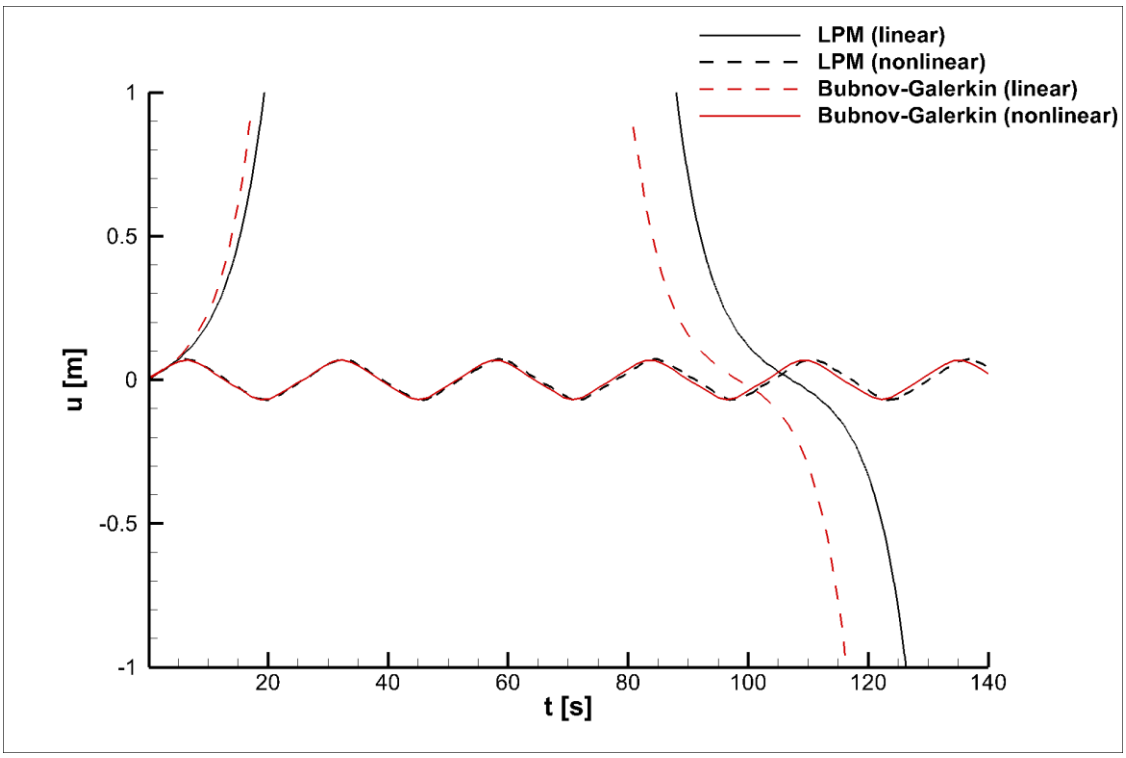


Рисунок 2.26 – Сравнение расчетов при $\Omega = 0.33$ рад/с с результатами в [49]

Изложенное выше подчеркивает преимущество нелинейных постановок, характеризующихся более высокой устойчивостью и скоростью сходимости в сравнении с линейными аналогами. В рамках метода сосредоточенных параметров (МСП) нелинейные модели позволяют использовать менее плотную расчетную сетку, что существенно сокращает время вычислений — критически важный фактор при математическом моделировании сложных систем. Успешная верификация полученных данных с результатами других авторов подтверждает обоснованность применения МСП для анализа динамики бурильных колонн. Кроме того, это открывает перспективы для внедрения данного метода в расчеты изгибных колебаний конструкций с неоднородной структурой и переменными характеристиками оборудования, где классические алгоритмы оказываются трудноприменимыми.

2.4.3 Моделирование пространственных поперечных колебаний бурильной колонны в потоке жидкости

В данном параграфе представлено обобщение разработанных вычислительного алгоритма и методики на случай пространственных поперечных колебаний бурильной колонны с учетом воздействия потока жидкости. Численное исследование проводится методом сосредоточенных параметров и включает многопараметрический анализ нелинейной динамики системы. В качестве базовой модели использована модель из работы [49], в которой поток жидкости моделировался как добавочная масса внутри бурильной колонны, движущаяся с постоянной скоростью и создающая дополнительные

центробежные и кориолисовы силы инерции, пропорциональные кривизне оси трубы. Схема нагружения представлена на рисунке 2.27.

Запишем математическую модель бурильной штанги, вращающейся с угловой скоростью Ω с учетом действия осевого сжатия силой $N(x_3,t)$ и крутящего момента $M(x_3,t)$ в потоке жидкости, выведенной авторами работы [49]:

$$\begin{aligned}&\left(\rho A+\rho_f A_f\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+EI_{x_2}\frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^4}-\rho I_{x_2}\frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^2\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(M\left(x_3,t\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\\&+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(N\left(x_3,t\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)-\frac{EA}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^3-\frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2\right)\\&-\left(\rho A+\rho_f A_f\right)\left(\Omega^2 u_1-2\Omega\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)+V_f^2\rho_f A_f\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}=0,\end{aligned}\qquad(2.57)$$

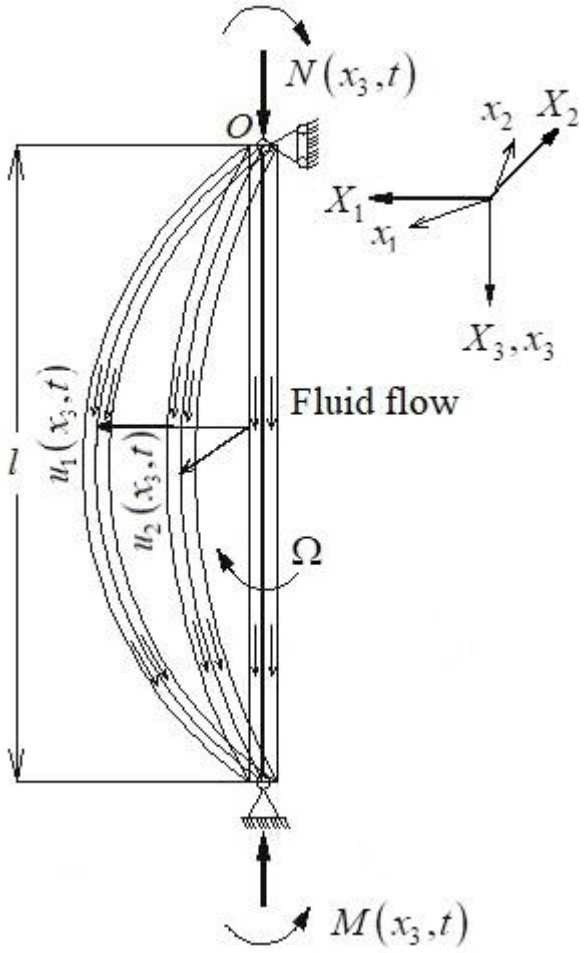


Рисунок 2.27 – Схема буровой штанги в потоке жидкости

$$\left(\rho A+\rho_f A_f\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+EI_{x_1}\frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^4}-\rho I_{x_1}\frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^2\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(M\left(x_3,t\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(N\left(x_3,t\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)-\frac{EA}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^3-\frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2\right) \qquad (2.58)$$
$$-\left(\rho A-\rho_f A_f\right)\left(\Omega^2 u_2+2\Omega\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)+V_f^2\rho_f A_f\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}=0,$$

где A_f - площадь поперечного сечения внутреннего канала штанги, ρ_f - плотность потока жидкости, V_f – скорость потока жидкости.

Граничные условия задачи соответствуют шарнирному опиранию:

$$\boldsymbol{u}\left(0,t\right)=0,\quad \boldsymbol{u}\left(L,t\right)=0, \qquad (2.59)$$

$$EI\frac{\partial^2\boldsymbol{u}\left(0,t\right)}{\partial x_3^2}=0,\quad EI\frac{\partial^2\boldsymbol{u}\left(L,t\right)}{\partial x_3^2}=0. \qquad (2.60)$$

Начальные условия для рассматриваемой системы задаются в виде:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{u}\left(x_3,0\right)=0\quad \left(0\le x_3\le L\right),\\ &\frac{\partial\boldsymbol{u}\left(x_3,0\right)}{\partial t}=C_i\quad \left(0<x_3<L\right),\quad \boldsymbol{u}=\left(u_1,u_2\right).\end{aligned} \qquad (2.61)$$

Дискретизация нелинейной динамики бурильной колонны МСП

Для сведения сплошной среды к дискретной расчетной схеме используем МСП. Представим колонну конечным числом элементов, длина каждого находится по формуле (2.18). Используя следующие масштабы, обезразмерим систему:

$$\begin{aligned}&u_1=L\tilde{u}_1,\quad u_2=L\tilde{u}_2,\quad x_3=L\tilde{x}_3,\quad t=\frac{\tilde{t}}{\omega_0},\\ &\omega_0=\sqrt{\frac{L^2N\pi^2-EI_{x_2}\pi^4+AL^4\rho\omega^2}{\rho L^2\left(AL^2+I_{x_2}\pi^2\right)}}.\end{aligned} \qquad (2.62)$$

Уравнения примут вид (в дальнейшем опустим $\sim$ для удобства):

$$
\begin{aligned}
&\left(\rho A+\rho_f A_f\right)\omega_0^2\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial\tilde{t}^{\,2}}+\frac{EI_{x_2}}{L^4}\frac{\partial^4\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3^4}-\frac{\rho I_{x_2}\omega_0^2}{L^2}\frac{\partial^4\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3^2\partial\tilde{t}^{\,2}}+M\frac{\partial^3\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3^3}\\
&+\frac{1}{L}\frac{\partial N\left(\tilde{x}_3L,\tilde{t}\,/\,\omega_0\right)}{\partial\tilde{x}_3L}\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3}+\frac{1}{L^2}N\left(\tilde{x}_3L,\tilde{t}\,/\,\omega_0\right)\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3^2}\\
&-\frac{3EA}{(1-\nu)L^2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3}\right)^2\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3^2}-\frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)}\left[\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3^2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3}\right)^2+\frac{2}{L^2}\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3}\frac{\partial^2\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3^2}\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3}\right]\\
&-\left(\rho A+\rho_f A_f\right)\left(\Omega^2\tilde{u}_1-2\Omega\omega_0\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\tilde{t}}\right)+\frac{V_f^2\rho_f A_f}{L^2}\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3^2}=0,
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\rho A+\rho_f A_f\right)\omega_0^2\frac{\partial^2\tilde{u}_2}{\partial\tilde{t}^{\,2}}+\frac{EI_{x_2}}{L^4}\frac{\partial^4\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3^4}-\frac{\rho I_{x_2}\omega_0^2}{L^2}\frac{\partial^4\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3^2\partial\tilde{t}^{\,2}}-M\frac{\partial^3\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3^3}\\
&+\frac{1}{L}\frac{\partial N\left(\tilde{x}_3L,\tilde{t}\,/\,\omega_0\right)}{\partial\tilde{x}_3L}\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3}+\frac{1}{L^2}N\left(\tilde{x}_3L,\tilde{t}\,/\,\omega_0\right)\frac{\partial^2\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3^2}\\
&-\frac{3EA}{(1-\nu)L^2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3}\right)^2\frac{\partial^2\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3^2}-\frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)}\left[\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3^2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3}\right)^2+\frac{2}{L^2}\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3}\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3^2}\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3}\right]\\
&-\left(\rho A+\rho_f A_f\right)\left(\Omega^2\tilde{u}_2+2\Omega\omega_0\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\tilde{t}}\right)+\frac{V_f^2\rho_f A_f}{L^2}\frac{\partial^2\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3^2}=0.
\end{aligned}
\tag{2.64}
$$

Граничные условия в безразмерных переменных примут вид:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\boldsymbol{u}}\left(0,\tilde{t}\,/\,\omega_0\right)=0,\quad \tilde{\boldsymbol{u}}\left(1,\tilde{t}\,/\,\omega_0\right)=0,\\
&\frac{EI}{L}\frac{\partial^2\tilde{\boldsymbol{u}}\left(0,\tilde{t}\,/\,\omega_0\right)}{\partial\tilde{x}_3^2}=0,\quad \frac{EI}{L}\frac{\partial^2\tilde{\boldsymbol{u}}\left(1,\tilde{t}\,/\,\omega_0\right)}{\partial\tilde{x}_3^2}=0.
\end{aligned}
\tag{2.65}
$$

Начальные условия после обезразмеривания запишутся следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\boldsymbol{u}}\left(\tilde{x}_3L,0\right)=0\quad\left(0\le\tilde{x}_3\le1\right),\\
&\omega_0L\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{u}}\left(\tilde{x}_3L,0\right)}{\partial\tilde{t}}=C_i\quad\left(0<\tilde{x}_3<1\right),\quad \tilde{\boldsymbol{u}}=\left(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2\right).
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

Пространственная дискретизация модели осуществляется путем замены производных их конечно-разностными аналогами (А.4) из Приложения А. Сгруппировав слагаемые, содержащие ускорения, в левой части системы уравнений, применим алгоритм преобразования типа Гаусса, подробно изложенный в предыдущем параграфе. Данная процедура позволяет

преобразовать исходную трехдиагональную матрицу к диагональному виду относительно ускорений. В итоге расчетная зависимость для первой компоненты перемещений принимает следующий вид:

$$\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right)_j = k_j\left[\frac{EI}{L^4}\left(\frac{u_{1,j-2}-4u_{1,j-1}+6u_{1,j}-4u_{1,j+1}+u_{1,j+2}}{\Delta x^4}\right)\right.$$
$$+\frac{M}{L^3}\left(\frac{u_{2,j+2}-2u_{2,j+1}+2u_{2,j-1}-u_{2,j-2}}{2\Delta x^3}\right)+N(x_jL,\frac{t}{\omega_0})\left(\frac{u_{1,j-1}-2u_{1,j}+u_{1,j+1}}{\Delta x^2L^2}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial N(xL,t)}{\partial xL}\right)_j\frac{u_{1,j+1}-u_{1,j-1}}{2\Delta xL}-\frac{3EA}{(1-\nu)}\left(\frac{u_{1,j+1}-u_{1,j-1}}{2\Delta x}\right)^2\left(\frac{u_{1,j-1}-2u_{1,j}+u_{1,j+1}}{\Delta x^2L^2}\right)$$
$$-\frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)}\left[\left(\frac{u_{2,j+1}-u_{2,j-1}}{2\Delta x}\right)^2\left(\frac{u_{1,j-1}-2u_{1,j}+u_{1,j+1}}{\Delta x^2L^2}\right)+\right.$$
$$\left.2\left(\frac{u_{2,j+1}-u_{2,j-1}}{2\Delta x}\right)\left(\frac{u_{2,j-1}-2u_{2,j}+u_{2,j+1}}{\Delta x^2L^2}\right)\left(\frac{u_{1,j+1}-u_{1,j-1}}{2\Delta x}\right)\right] \qquad (2.67)$$
$$\left.-\left(\rho A+\rho_f A_f\right)\left(\Omega^2u_{1,j}-2\Omega\omega_0\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)_j\right)+V_f^2\rho_fA_f\left(\frac{u_{1,j-1}-2u_{1,j}+u_{1,j+1}}{\Delta x^2L^2}\right)\right].$$

Для второй компоненты перемещений уравнение запишется после дискретизации и преобразований:

$$\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right)_j = k_j\left[\frac{EI}{L^4}\left(\frac{u_{2,j-2}-4u_{2,j-1}+6u_{2,j}-4u_{2,j+1}+u_{2,j+2}}{\Delta x^4}\right)\right.$$
$$-\frac{M}{L^3}\left(\frac{u_{1,j+2}-2u_{1,j+1}+2u_{1,j-1}-u_{1,j-2}}{2\Delta x^3}\right)+N(x_jL,\frac{t}{\omega_0})\left(\frac{u_{2,j-1}-2u_{2,j}+u_{2,j+1}}{\Delta x^2L^2}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial N(xL,t)}{\partial xL}\right)_j\frac{u_{2,j+1}-u_{2,j-1}}{2\Delta xL}-\frac{3EA}{(1-\nu)}\left(\frac{u_{2,j+1}-u_{2,j-1}}{2\Delta x}\right)^2\left(\frac{u_{2,j-1}-2u_{2,j}+u_{2,j+1}}{\Delta x^2L^2}\right)$$
$$-\frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)}\left[\left(\frac{u_{1,j+1}-u_{1,j-1}}{2\Delta x}\right)^2\left(\frac{u_{2,j-1}-2u_{2,j}+u_{2,j+1}}{\Delta x^2L^2}\right)+\right.$$
$$\left.2\left(\frac{u_{1,j+1}-u_{1,j-1}}{2\Delta x}\right)\left(\frac{u_{1,j-1}-2u_{1,j}+u_{1,j+1}}{\Delta x^2L^2}\right)\left(\frac{u_{2,j+1}-u_{2,j-1}}{2\Delta x}\right)\right]$$
$$\left.-\left(\rho A+\rho_f A_f\right)\left(\Omega^2u_{2,j}+2\Omega\omega_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)_j\right)+V_f^2\rho_fA_f\left(\frac{u_{2,j-1}-2u_{2,j}+u_{2,j+1}}{\Delta x^2L^2}\right)\right], \qquad (2.68)$$

где $j = \overline{2, N-3}$, k_j – коэффициенты после преобразований типа Гаусса.

Используем граничные условия для дискретизации граничных точек уравнений (2.63)-(2.64). Так, в соответствии с первыми двумя уравнениями (2.65) уравнения (2.63)-(2.64) в точках $j = 0, N-1$ примут вид:

$$\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right)_{N-1} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right)_{N-1} = 0. \tag{2.69}$$

Уравнения (2.63)-(2.64) в точках $j = 1, N-2$ аналогичны (2.67)-(2.68), за исключением производных третьего и четвертого порядков. Разностные формулы для производных с учетом граничных условий (2.65) примут вид:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\Delta^3 v}{\Delta x^3}\right)_1 = \frac{v_0 - 2v_1 + v_2}{\Delta x^3}, \\
&\left(\frac{\Delta^4 v}{\Delta x^4}\right)_1 = \frac{v_3 - 4v_2 + 5v_1 - 2v_0}{\Delta x^4}, \\
&\left(\frac{\Delta^3 v}{\Delta x^3}\right)_{N-2} = \frac{-v_{N-3} + 2v_{N-2} - v_{N-1}}{\Delta x^3}, \\
&\left(\frac{\Delta^4 v}{\Delta x^4}\right)_{N-2} = \frac{v_{N-4} - 4v_{N-3} + 5v_{N-2} - 2v_{N-1}}{\Delta x^4}.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Численное решение. Анализ результатов

Для численного анализа дискретной модели поперечных пространственных колебаний бурильной колонны с учетом промывочной жидкости применялся метод Рунге-Кутты четвертого порядка. В основу расчетов лег модифицированный алгоритм, представленный в предыдущих параграфах, который был адаптирован для учета пространственного характера деформаций. Программная реализация включает предварительную процедуру понижения порядка системы до ОДУ первого порядка (с сопутствующим удвоением числа уравнений), а также блок алгебраических преобразований для приведения трехдиагональной матрицы к диагональному виду. Разработанный инструмент характеризуется универсальностью: он позволяет интегрировать системы произвольной размерности с вариативными правыми частями. Исходные значения физических параметров приняты согласно таблице 2.7 и взяты из работы [49].

Таблица 2.7 – Значение расчетных параметров системы

Параметр	Значение
Модуль Юнга, E	2.1×10^{11} Па
Внутренний диаметр буровой колонны, d_1	0.2 м
Внешний диаметр буровой колонны, d_2	0.12 м
Плотность материала буровой колонны, ρ	7800 кг/м^3
Коэффициент Пуассона, ν	0.28
Площадь поперечного сечения, A	2.01×10^{-2} м^2
Осевые моменты инерции, $I_{x_1} = I_{x_2} = I$	6.84×10^{-5} м^4
Крутящий момент, M	10^4 Нм
Угловая скорость вращения колонны, Ω	0.33 рад/с
Шаг по времени, Δt	5×10^{-4} с
Частота внешней нагрузки, ω	0.33 рад/с
Длина колонны, L	100 м
Плотность промывочной жидкости, ρ_f	1800 кг/м^3
Площадь сечения внутреннего канала колонны, A_f	1.13×10^{-2} м^2
Скорость потока промывочной жидкости, V_f	10 м/с

Продольная сжимающая нагрузка $N(x,t)$, моделирующая внешнее осевое сжатие колонны, рассматривалась как сумма постоянной составляющей и переменной во времени гармонической функции:

$$N(x,t) = N_0 + N_t\Phi(t), \tag{2.71}$$

где $\Phi(t) = \sin(\omega t)$.

Для анализа адекватности разработанного программного комплекса было проведено многопараметрическое моделирование, аналогичное работе авторов [49]. Так, было проанализировано влияние учета геометрической нелинейности на динамический отклик системы. Нелинейная система (2.57)-(2.58) сравнивалась с ее линейным аналогом:

$$\begin{aligned}&\left(\rho A + \rho_f A_f\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^4} - \rho I\frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^2\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(M\left(x_3,t\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\\ &+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(N\left(x_3,t\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) - \left(\rho A + \rho_f A_f\right)\left(\Omega^2 u_1 - 2\Omega\frac{\partial u_2}{\partial t}\right) + V_f^2\rho_f A_f\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} = 0,\end{aligned} \tag{2.72}$$

$$\left(\rho A+\rho_f A_f\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+EI_{x_1}\frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^4}-\rho I_{x_1}\frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^2\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(M\left(x_3,t\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(N\left(x_3,t\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)-\left(\rho A-\rho_f A_f\right)\left(\Omega^2 u_2+2\Omega\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)+V_f^2\rho_f A_f\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}=0. \quad (2.73)$$

На рисунках 2.28-2.29 представлены результаты моделирования динамики бурильной колонны в серединном поперечном сечении при $V_f=10$ м/с для линейного и нелинейного случаев. Установлено, что пиковые значения амплитуд перемещений в линейной постановке превышают аналогичные показатели нелинейной модели на 0,017 м, что соответствует разнице в 30–31 %. Повышение скорости потока промывочной жидкости до значения $V_f=30$ м/с при сохранении прочих параметров системы инициирует потерю устойчивости линейной модели. Нелинейная постановка, напротив, сохраняет стабильность, а расчетные перемещения в данном режиме демонстрируют лишь незначительные отклонения от показателей, зафиксированных при $V_f=10$ м/с (рисунки 2.30– 2.31). Следовательно, для глубокого изучения влияния параметров системы (в частности, скорости потока жидкости) на её динамику оправдано использование нелинейной постановки, обладающей лучшей сходимостью по сравнению с линейными аналогами.

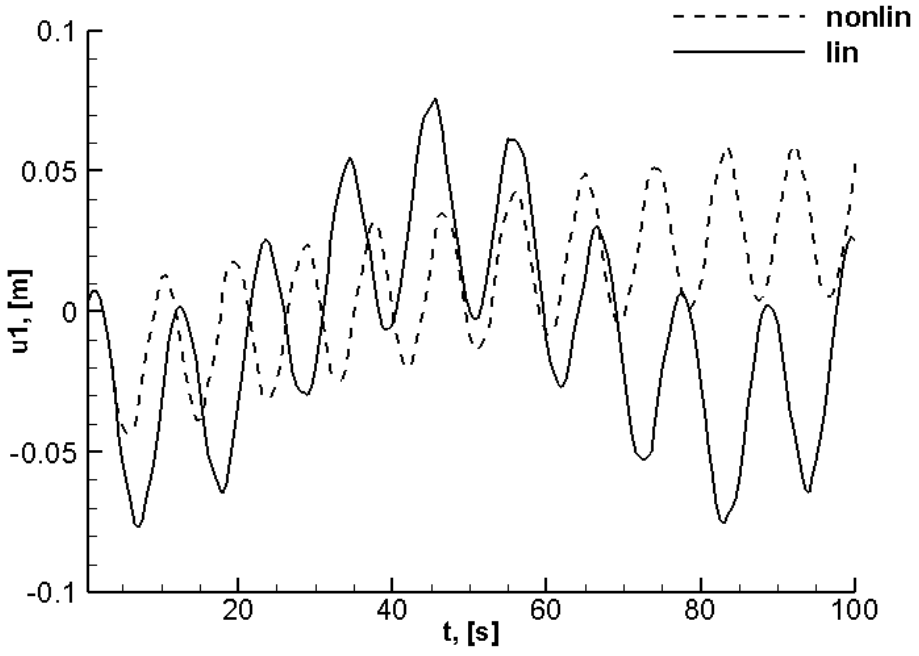


Рисунок 2.28 – Анализ влияния нелинейности на компоненту перемещений u_1 при $V_f=10$м/с

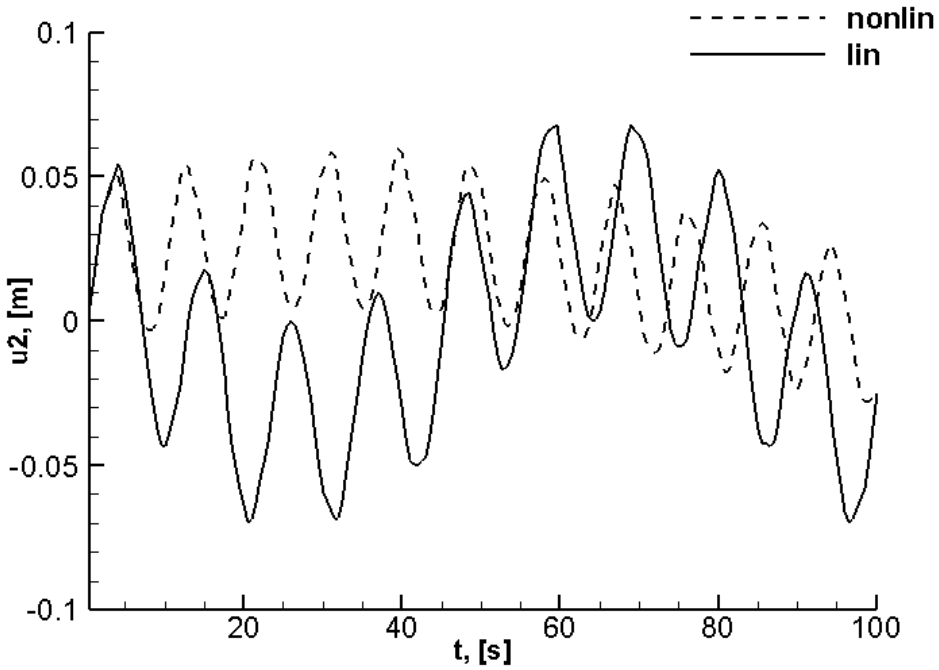


Рисунок 2.29 – Анализ влияния нелинейности на компоненту перемещений u_2 при $V_f = 10$ м/с

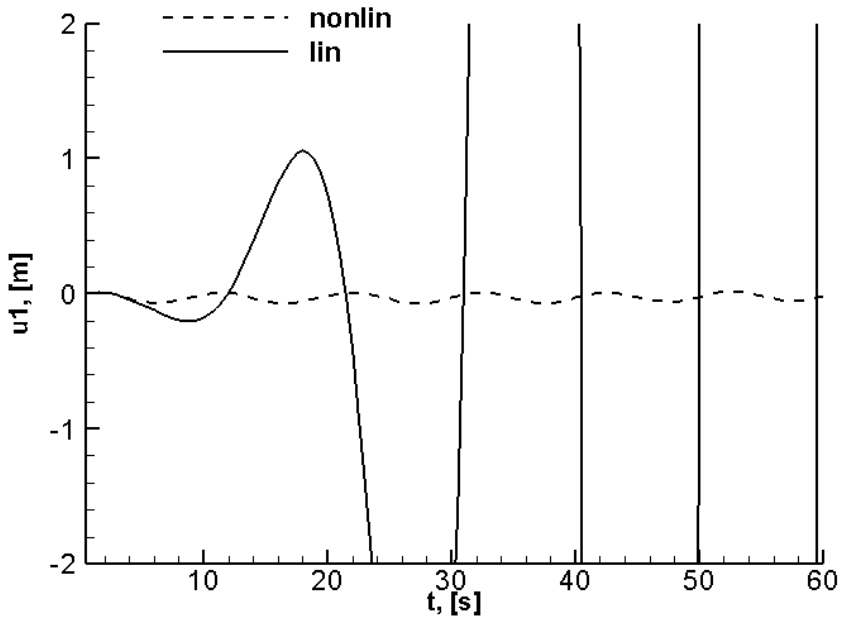


Рисунок 2.30 – Анализ влияния нелинейности на компоненту перемещений u_1 при $V_f = 30$ м/с

С целью выявления роли промывочной жидкости в поведении бурильной колонны проведено сопоставление результатов двух моделей: полной (2.58– 2.59), учитывающей гидродинамическое воздействие, и упрощенной:

$$\rho A\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+EI_{x_2}\frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^4}-\rho I_{x_2}\frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^2\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(M\left(x_3,t\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(N\left(x_3,t\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)-\frac{EA}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^3-\frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2\right) \qquad (2.74)$$
$$-\rho A\left(\Omega^2 u_1-2\Omega\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)=0,$$

$$\rho A\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+EI_{x_1}\frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^4}-\rho I_{x_1}\frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^2\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(M\left(x_3,t\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(N\left(x_3,t\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)-\frac{EA}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^3-\frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2\right) \qquad (2.75)$$
$$-\rho A\left(\Omega^2 u_2+2\Omega\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)=0.$$

где внешняя среда не рассматривается. Для проведения сравнительного анализа скорость потока была принята равной $V_f=60$ м/с.

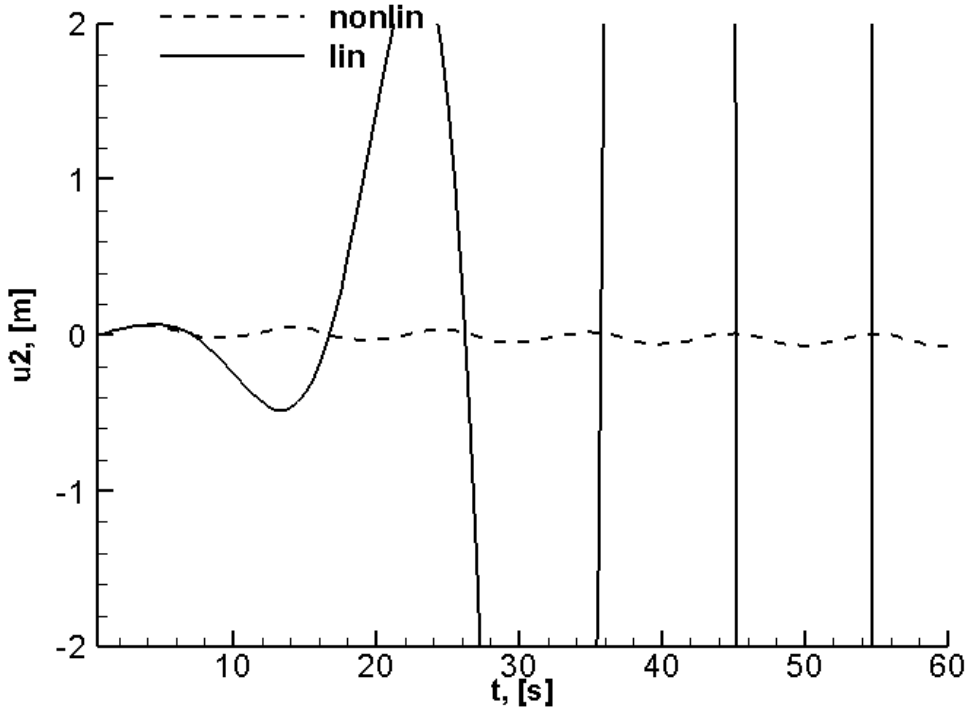


Рисунок 2.31 – Анализ влияния нелинейности на компоненту перемещений u_2 при $V_f=30$ м/с

Временные зависимости перемещений срединного сечения колонны проиллюстрированы на рисунках 2.32–2.33. Включение в расчетную модель фактора промывочной жидкости (при скорости $V_f = 60\ \text{м/с}$) приводит к существенному росту амплитуды колебаний. Данный эффект объясняется принятой методикой учета потока как присоединенной массы: возрастание эквивалентного веса системы приводит к усилению центробежных и кориолисовых сил инерции, что интенсифицирует динамический отклик колонны.

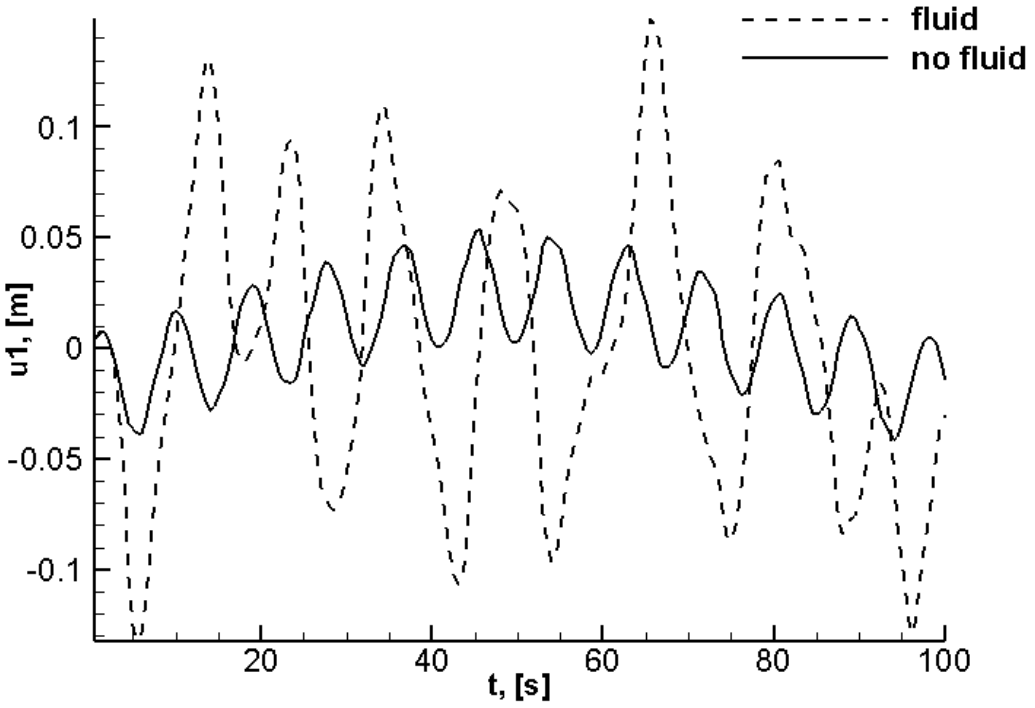


Рисунок 2.32 – Перемещения u_1 с учетом и без учета промывочной жидкости

Для анализа динамических режимов были построены конфигурационные траектории точки срединного сечения в пространстве перемещений, представляющие собой зависимость между компонентами перемещения бурильной колонны (рисунки 2.34-2.35).

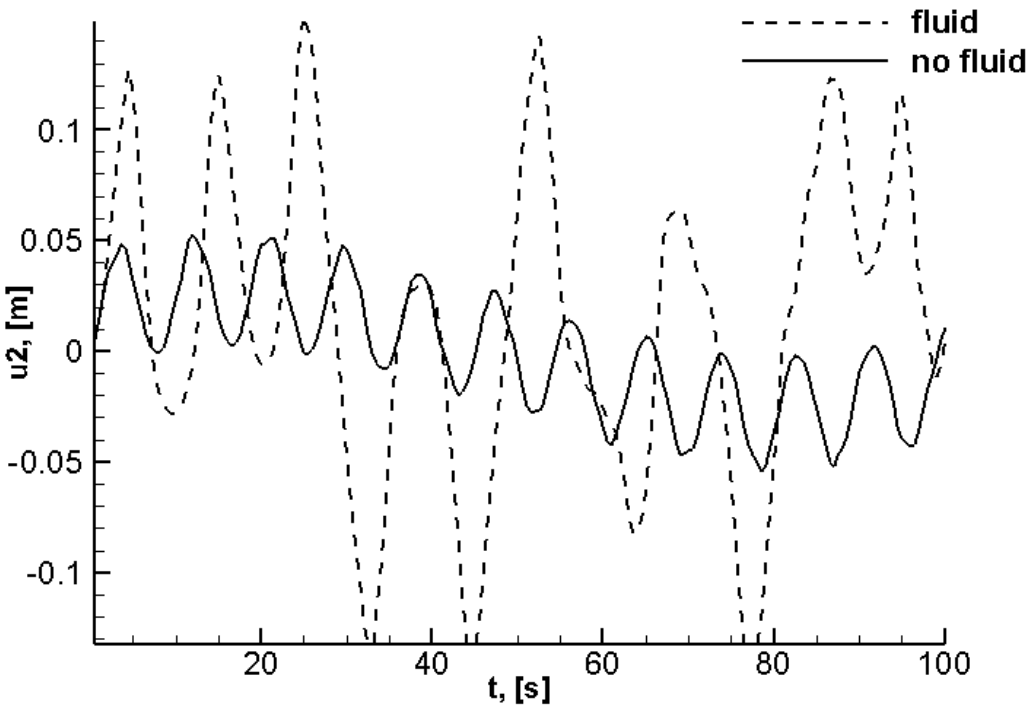


Рисунок 2.33 – Перемещения u_2 с учетом и без учета потока жидкости

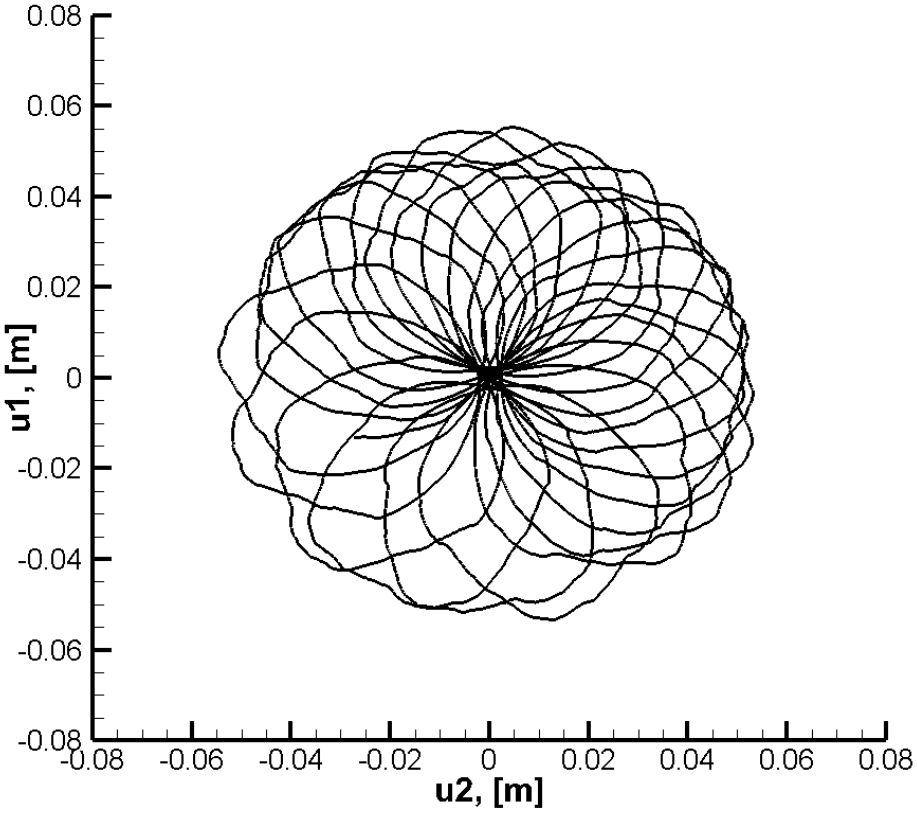


Рисунок 2.34 – Траектория точки серединного сечения в пространстве перемещений (без учета промывочной жидкости)

Сопоставление графиков выявило, что присутствие потока промывочной жидкости придает движению выраженный хаотический характер. В противоположность этому, в отсутствие влияния среды траектории перемещений отличаются более упорядоченной и детерминированной структурой.

Следующим этапом работы стало изучение зависимости параметров колебаний колонны от скорости течения промывочной среды. В практике освоения нефтегазовых месторождений циркуляция раствора по внутреннему каналу является критически важным процессом, обеспечивающим очистку забоя от шлама. Режим нагнетания определяется характеристиками используемых насосных агрегатов, а химический состав и база раствора (водная, эмульсионная, газообразная и др.) подбираются исходя из конкретных геолого-стратиграфических условий [107].

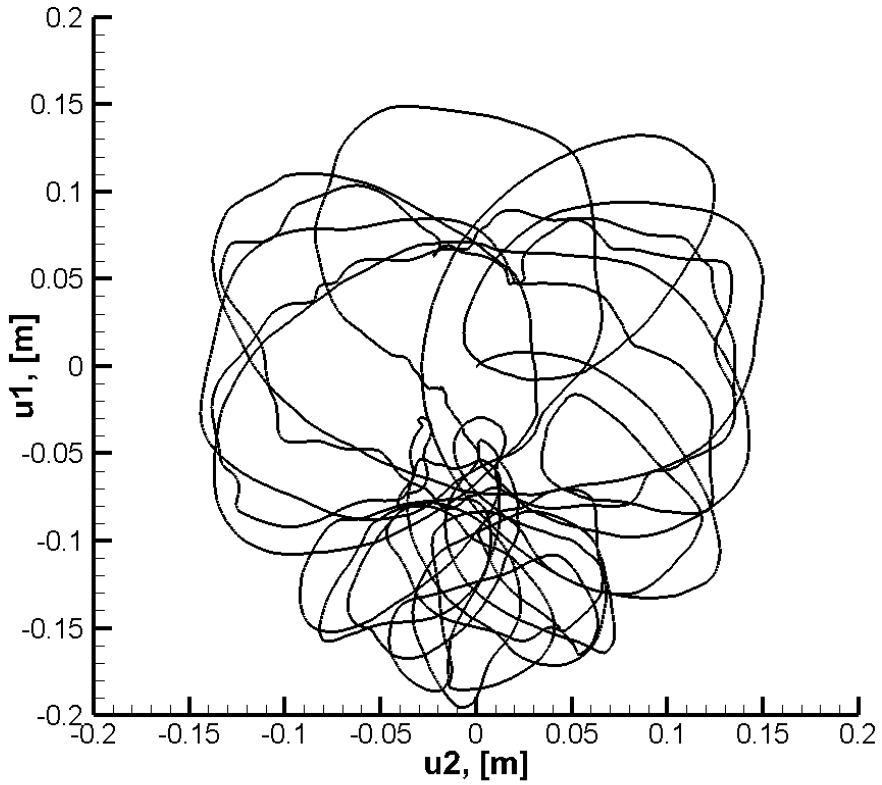


Рисунок 2.35 – Траектория точки серединного сечения в пространстве перемещений (с учетом промывочной жидкости)

Динамика смещений бурильной колонны при различных скоростных режимах промывочной жидкости ($V_f = 30, 60, 100$ м/с) отражена на рисунках 2.36-2.37. Полученные результаты указывают на прямую зависимость: интенсификация потока ведет к значительному росту амплитуды колебаний, что

коррелирует с выводами, представленными в работах [17, 49]. С инженерной точки зрения это подчеркивает необходимость строгого контроля скорости подачи очистного агента для обеспечения безаварийной работы и предотвращения обрушения стенок скважины.

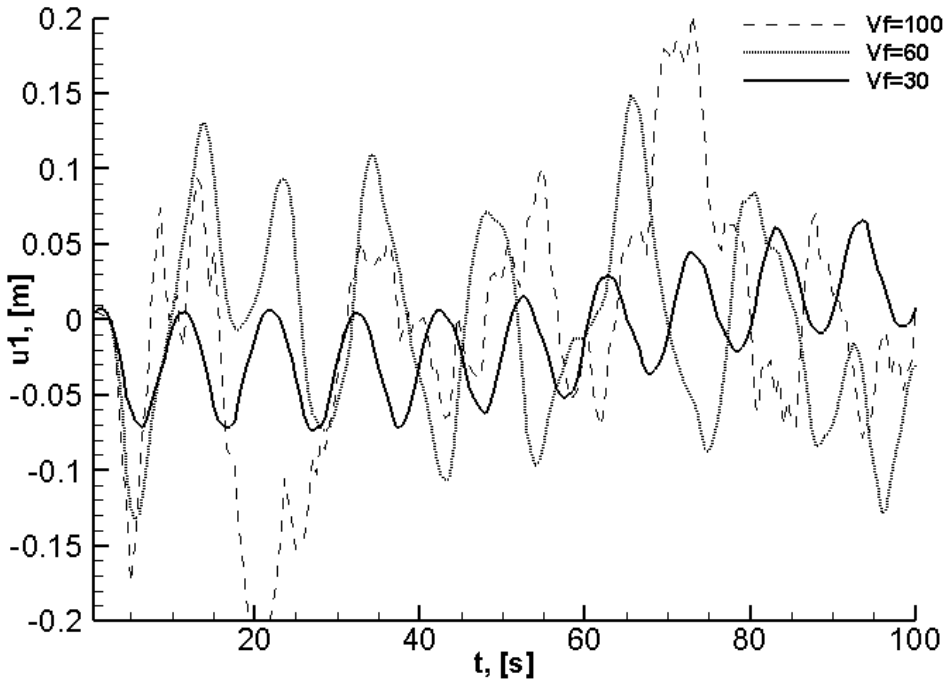


Рисунок 2.36 – Перемещения u_1 в зависимости от скорости потока жидкости

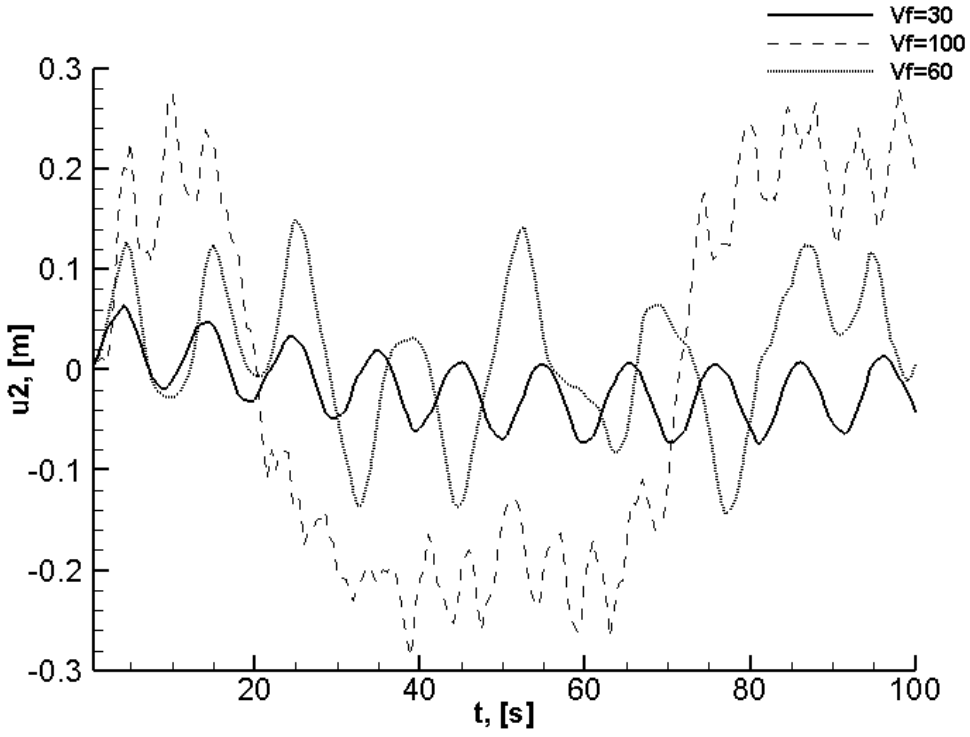


Рисунок 2.37 – Перемещения u_2 в зависимости от скорости потока жидкости

Стоит отметить, что в рамках данной работы проведен качественный анализ и результаты могут быть масштабированы на реальные диапазоны скоростей. Данный параметрический ряд был взят в соответствии с авторами работы [49] для сравнения и проведения качественного анализа колебаний системы в зависимости от параметров системы.

Плотность промывочной среды выступает значимым фактором, определяющим характер вибрационных процессов в буровой колонне. Анализ данных на рисунках 2.38-2.39 показывает, что повышение плотности раствора приводит к росту амплитуд перемещений и трансформации структуры колебаний в сторону их дезорганизации. Учитывая, что в реальных условиях плотность может варьироваться от $\rho_f = 890$ кг/м^3 до $\rho_f = 2200$ кг/м^3 и выше [9], использование технической воды плотностью $\rho_f = 1000$ кг/м^3 представляется наиболее рациональным. Если геологические условия допускают применение воды, такой выбор является приоритетным как с точки зрения стабилизации динамики системы, так и по экономическим соображениям.

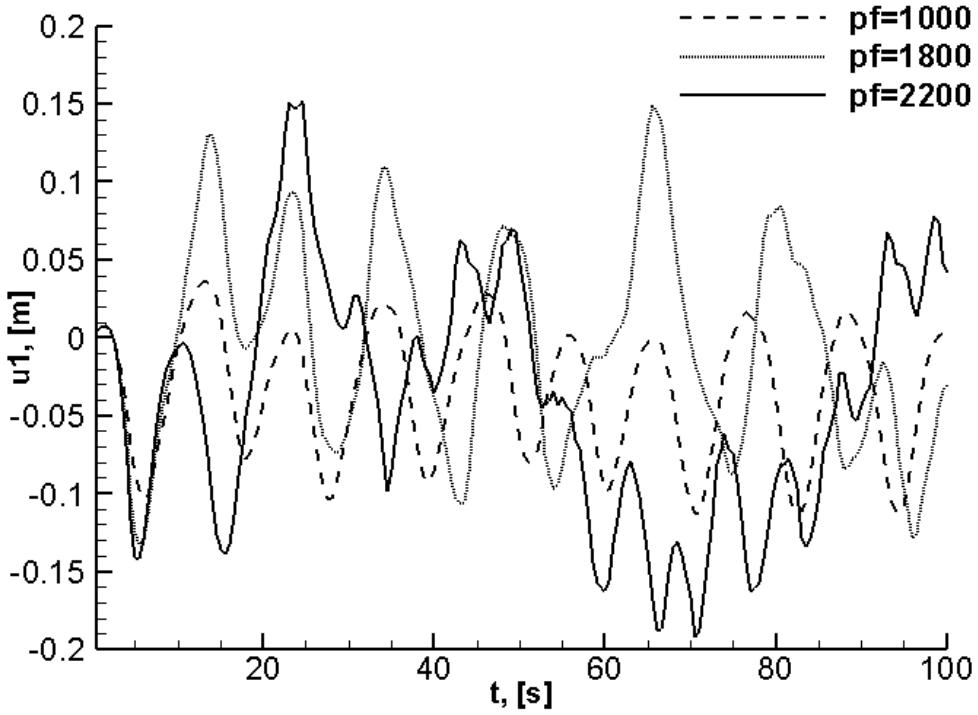


Рисунок 2.38 – Перемещения u_1 при использовании промывочной жидкости разной плотности

Перемещения бурильной колонны по длине в момент времени $t = 100$ с представлены на рисунке 2.40. Из рисунка можно сделать вывод о наличии высших форм колебаний в системе, поскольку кривая перемещений пересекает ось не только на закрепленных границах, но и во внутренней точке.

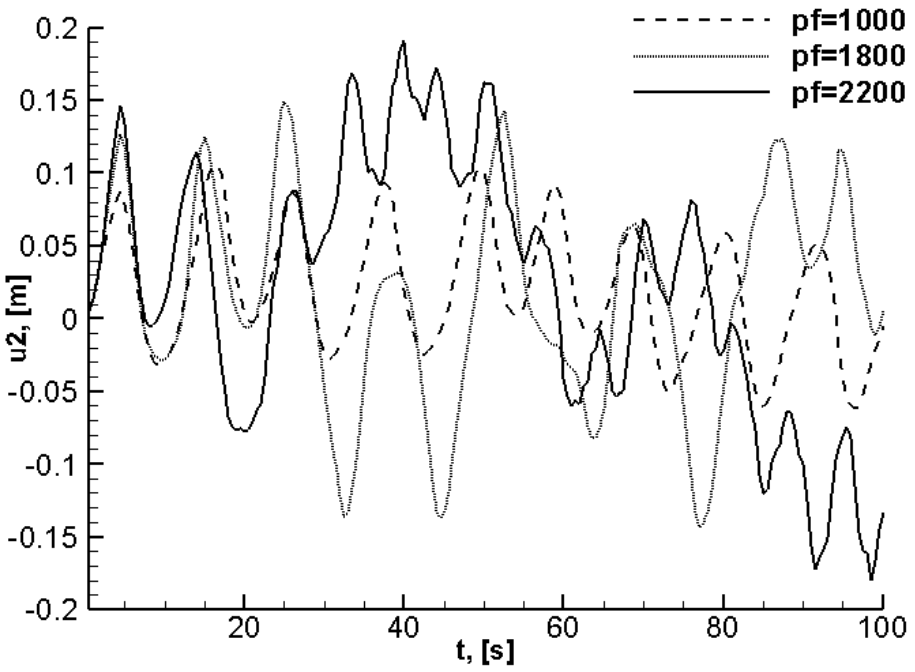


Рисунок 2.39 – Перемещения u_2 при разных плотностях промывочной жидкости

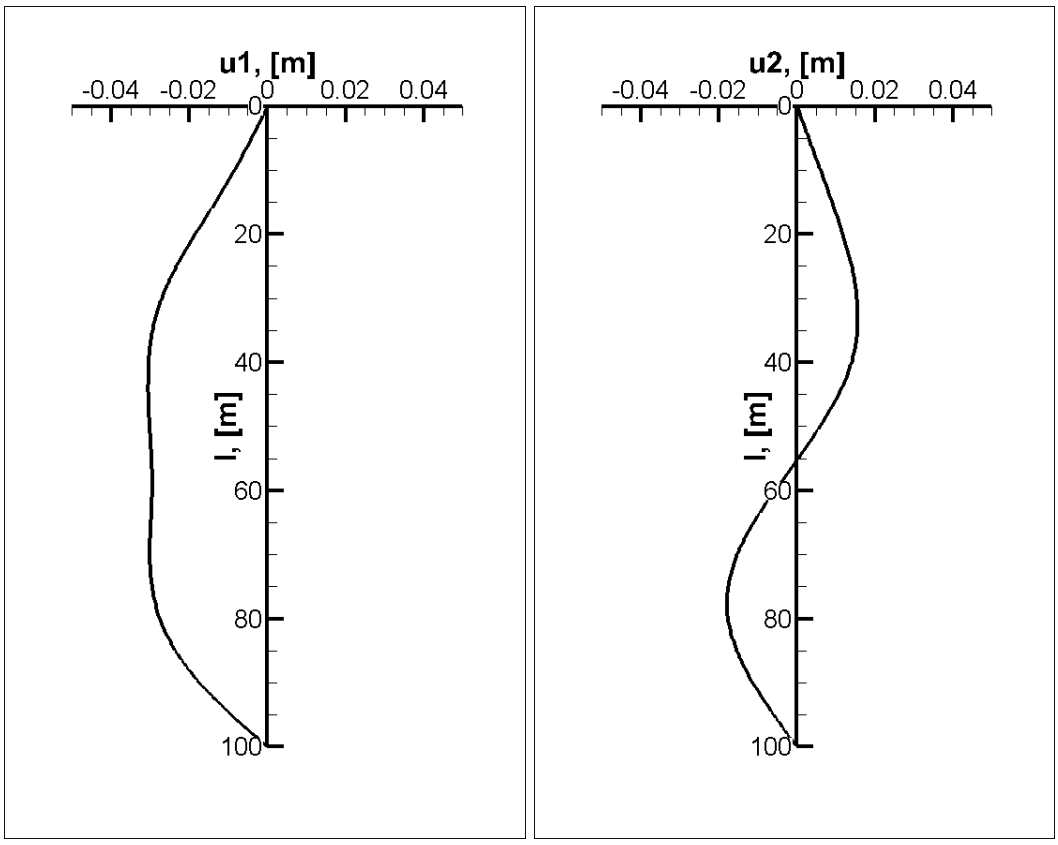


Рисунок 2.40 – Колебания по длине колонны в момент времени $t = 100\,\text{с}$

Выводы по разделу 2

Разработан обобщенный программный комплекс для решения задач динамики стержневых систем на примере вращающихся бурильных колонн неглубинного бурения. Особенностями алгоритма являются универсальность, масштабируемость, адаптивность, алгоритмическая оптимизация за счет средств параллельного программирования, гибридная дискретизация, предварительные матричные преобразования типа Гаусса, высокий порядок аппроксимации, и учет комплексной физики взаимодействия. Алгоритмы верифицированы на трех тестовых задачах с постепенным усложнением алгоритма и программного комплекса, результаты показали высокую согласованность с ранее опубликованными работами. Автором было найдено оптимальное число потоков для распараллеливания. Для разработки численных моделей применялся метод сосредоточенных параметров, позволяющий учесть неоднородность объекта исследования. Проведены параметрический анализ влияния динамических характеристик на динамику бурильных колонн, найдено оптимальное число узлов для разбиения колонны. Установлено, что увеличение угловой скорости вращения и продольной нагрузки существенно влияет на повышение амплитуды и изменение частоты колебаний колонны; характеристики промывочной жидкости (плотность, скорость потока) также оказывают влияние на динамический отклик системы, в связи с чем при разработке скважин необходимо тщательно подбирать скоростные режимы и тип жидкости; учет геометрической нелинейности в динамических моделях повышает устойчивость численного решения, в то время как линейные модели зачастую не отражают истинной природы колебаний и дают завышенные оценки.

Созданная численная модель и программный комплекс расширяют спектр решаемых задач и позволяют применять разработанные алгоритмы для моделирования систем с неоднородностями, включая переменную структуру, локальные и сосредоточенные нагрузки, а также наличие конструктивных виброзащитных элементов типа стабилизаторов и демпферов.

3 МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ БУРИЛЬНЫХ КОЛОНН С РАЗЛИЧНЫМИ СЦЕНАРИЯМИ ВИБРОЗАЩИТЫ

Данный раздел посвящен применению разработанного обобщенного алгоритма анализа нелинейной динамики протяженных стержневых систем с переменной структурой к задачам моделирования и анализа динамики бурильных колонн с виброзащитными конструктивными элементами: опорными стабилизаторами и демпфирующими муфтами. Под сложным динамическим нагружением в разделе подразумевается учет потока газа, вращения стержня, собственного веса, крутящего момента, продольной сжимающей нагрузки. В первой части раздела исследуются пространственные колебания системы с установленными опорными стабилизаторами. Во второй части анализируются плоские перемещения бурильной колонны с включением демпфирующей муфты. Ключевой особенностью исследования является учет собственной кинематики муфты, рассматриваемой как физически и геометрически нелинейное сплошное тело.

3.1 Моделирование динамики бурильной колонны в потоке газа с учетом опорных стабилизаторов

Данный параграф посвящен развитию нелинейной модели вращающейся бурильной колонны в потоке газа на случай включения опорных стабилизаторов в кинематическую цепь, исследованию влияния собственного веса и параметров системы на характер и амплитуды перемещений колонны.

3.1.1 Постановка задачи и дискретизация

Для исследования нелинейной динамики используется модель бурильной колонны длиной L, представленная в виде упругого шарнирно опертого стержня. Система совершает вращательное движение с угловой скоростью Ω в газовом потоке, в динамическую цепь включено m поддерживающих стабилизаторов. Геометрия задачи описывается в двух правых декартовых системах координат: глобальной $OX_1X_2X_3$, фиксирующей боковые смещения, и локальной $Ox_1x_2x_3$, учитывающей вращение колонны (оси x_3 и X_3 коллинеарны). Рассматривается процесс вертикального бурения, при котором на колонну воздействуют крутящий момент $T\left(x_3,t\right)$ и продольное сжимающее усилие $N(x_3,t)$. Расчетная схема нагружения приведена на рисунке 3.1.

Представленная работа развивает концепцию упругого деформирования и пространственных колебаний бурильной колонны в газовой среде, изложенную в [49]. Новизна заключается в интеграции в динамическую систему поддерживающих стабилизаторов, аналогично подходу в работе [51], где исследовалась линейная модель при конечных деформациях.

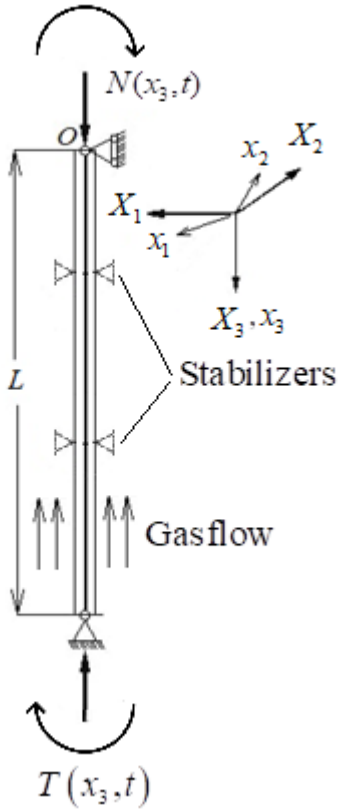


Рисунок 3.1 – Схема нагружения бурильной колонны

Математическая модель колебаний в потоке газа с включением m поддерживающих стабилизаторов:

$$\begin{aligned}
&\rho A\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+EI_{x_2}\frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^4}-\rho I_{x_2}\frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^2\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(T\left(x_3,t\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)+\\
&\frac{\partial}{\partial x_3}\left(N\left(x_3,t\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)-\frac{EA}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^3-\frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2\right)\\
&-hP_0\kappa\left(\bar{M}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\kappa+1}{4}\bar{M}^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2+\frac{\kappa+1}{12}\bar{M}^3\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^3\right)\\
&-\rho A\left(\Omega^2 u_1-2\Omega\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)+\sum_{m=1}^{M}\left(k_m^s u_1+c_m^s\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\delta\left(x_3-x_{3,m}^s\right)=0,
\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$
\begin{aligned}
&\rho A\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+EI_{x_1}\frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^4}-\rho I_{x_1}\frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^2\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(T\left(x_3,t\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(N\left(x_3,t\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)-\frac{EA}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^3-\frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2\right)\\
&-hP_0\kappa\left(\bar{M}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}-\frac{\kappa+1}{4}\bar{M}^2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2+\frac{\kappa+1}{12}\bar{M}^3\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^3\right)\\
&-\rho A\left(\Omega^2 u_2+2\Omega\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)+\sum_{m=1}^{M}\left(k_m^s u_2+c_m^s\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\delta\left(x_3-x_{3,m}^s\right)=0,
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

где u_1, u_2 – смещения центра изгиба, ρ – плотность, A – площадь поперечного сечения, E – модуль Юнга, I_{x_1}, I_{x_2} – моменты инерции, ν – коэффициент Пуассона, P_0 – давление невозмущенного газового потока; κ – показатель политропы, h – толщина стенок колонны, $\overline{M}=\dfrac{V_g}{C_0}$ – число Маха, где V_g – скорость невозмущенного потока газа, C_0 – скорость звука для невозмущенного потока газа, c_m^s – коэффициент демпфирования m-го стабилизатора, δ – дельта-функция Дирака.

Данная нелинейная постановка является обобщением теоретических положений, представленных в источниках [49] и [51]. Граничные условия для вектора перемещений $\boldsymbol{u}$ сформулированы исходя из механики процесса: фиксация колонны на поверхности и её взаимодействие с забоем допускают вращение, но ограничивают осевые и поперечные смещения, что приводит к следующему виду условий (примем $I_{x_1}=I_{x_2}=I$):

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}\left(0,t\right)=0,\quad \boldsymbol{u}\left(L,t\right)=0,\\
&EI\frac{\partial^2\boldsymbol{u}\left(0,t\right)}{\partial x_3^2}=0,\quad EI\frac{\partial^2\boldsymbol{u}\left(L,t\right)}{\partial x_3^2}=0.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Начальные условия запишем в виде:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}\left(x_3,0\right)=0\quad \left(0\le x_3\le L\right),\\
&\frac{\partial\boldsymbol{u}\left(x_3,0\right)}{\partial t}=C_i\quad \left(0<x_3<L\right),\quad \boldsymbol{u}=\left(u_1,u_2\right),
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

где C_i – константы, задающие начальные скорости смещения сечений стержня.

В основу расчетной схемы лег метод сосредоточенных параметров. Модель (3.1)–(3.4) была обезразмерена следующими масштабами:

$$u_1 = L\tilde{u}_1, \quad u_2 = L\tilde{u}_2, \quad x_3 = L\tilde{x}_3, \quad t = \frac{\tilde{t}}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{L^2 N\pi^2 - EI_{x_2}\pi^4 + AL^4\rho\omega^2}{\rho L^2\left(AL^2 + I_{x_2}\pi^2\right)}}. \qquad (3.5)$$

Допустим, крутящий момент – константа, то есть $T\left(x_3,t\right) = T$. Постановка задачи в безразмерных переменных примет следующий вид после деления на L :

$$\begin{aligned}
&\rho A\omega_0^2 \frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial\tilde{t}^2} + \frac{EI}{L^4}\frac{\partial^4\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3^4} - \frac{\rho I\omega_0^2}{L^2}\frac{\partial^4\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3^2\partial\tilde{t}^2} + \frac{T}{L^3}\frac{\partial^3\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3^3} + \\
&\frac{1}{L^2}N(\tilde{x}_3 L, \frac{\tilde{t}}{\omega_0})\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3^2} + \frac{1}{L^2}\frac{\partial N(\tilde{x}_3 L, \tilde{t}/\omega_0)}{\partial\tilde{x}_3}\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3} \\
&-\frac{3EA}{(1-\nu)L^2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial x_3}\right)^2\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial x_3^2} - \frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)L^2}\left[2\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3}\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3}\frac{\partial^2\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3^2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3}\right)^2\right] \\
&-\frac{hP_0\kappa}{L}\left(\bar{M}\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3} - \frac{\kappa+1}{4}\bar{M}^2\left(\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3}\right)^2 + \frac{\kappa+1}{12}\bar{M}^3\left(\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3}\right)^3\right) \\
&-\rho A\left(\Omega^2\tilde{u}_1 - 2\Omega\omega_0\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial t}\right) + \sum_{m=1}^{M}\frac{1}{L}\left(k_m^s\tilde{u}_1 + c_m^s\omega_0\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial t}\right)\delta\left(\tilde{x}_3 - \tilde{x}_{3,m}^s\right) = 0,
\end{aligned} \qquad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
&\rho A\omega_0^2 \frac{\partial^2\tilde{u}_2}{\partial\tilde{t}^2} + \frac{E}{L^4}\frac{\partial^4\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3^4} - \frac{\rho I\omega_0^2}{L^2}\frac{\partial^4\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3^2\partial\tilde{t}^2} - \frac{T}{L^3}\frac{\partial^3\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3^3} + \\
&\frac{1}{L^2}N(\tilde{x}_3 L, \frac{\tilde{t}}{\omega_0})\frac{\partial^2\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3^2} + \frac{1}{L^2}\frac{\partial N(\tilde{x}_3 L, \tilde{t}/\omega_0)}{\partial\tilde{x}_3}\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3} \\
&-\frac{3EA}{(1-\nu)L^2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial x_3}\right)^2\frac{\partial^2\tilde{u}_2}{\partial x_3^2} - \frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)L^2}\left[2\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3}\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3}\frac{\partial^2\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3^2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\tilde{x}_3}\right)^2\right] \\
&-\frac{hP_0\kappa}{L}\left(\bar{M}\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3} - \frac{\kappa+1}{4}\bar{M}^2\left(\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3}\right)^2 + \frac{\kappa+1}{12}\bar{M}^3\left(\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\tilde{x}_3}\right)^3\right) \\
&-\rho A\left(\Omega^2\tilde{u}_2 + 2\Omega\omega_0\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial t}\right) + \sum_{m=1}^{M}\frac{1}{L}\left(k_m^s\tilde{u}_2 + c_m^s\omega_0\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial t}\right)\delta\left(\tilde{x}_3 - \tilde{x}_{3,m}^s\right) = 0,
\end{aligned} \qquad (3.7)$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}\left(0,\tilde{t}\right)=0,\quad \tilde{\boldsymbol{u}}\left(1,\tilde{t}\right)=0,$$
$$EI\frac{\partial^2\tilde{\boldsymbol{u}}\left(0,\tilde{t}\right)}{\partial\tilde{x}_3^2}=0,\quad EI\frac{\partial^2\tilde{\boldsymbol{u}}\left(1,\tilde{t}\right)}{\partial\tilde{x}_3^2}=0. \tag{3.8}$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}\left(\tilde{x}_3,0\right)=0\quad\left(0\le\tilde{x}_3\le 1\right),$$
$$\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{u}}\left(\tilde{x}_3,0\right)}{\partial\tilde{t}}=C_i\quad\left(0<\tilde{x}_3<1\right),\quad \tilde{\boldsymbol{u}}=\left(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2\right), \tag{3.9}$$

Для удобства дальнейшего изложения знак «тильда» далее опущен. Аппроксимация пространственных переменных осуществлялась с помощью разностных производных, представленных в Приложении А (А.4), полученных из рядов Тейлора. Таким образом, вычислительная точность численной схемы – второй порядок по пространству и четвертый по времени $O(\Delta x^2,\Delta t^4)$.

Присутствие в математической модели смешанной производной четвертого порядка обуславливает необходимость применения дополнительных алгебраических преобразований типа Гаусса. Это позволяет преобразовать исходную трехдиагональную матрицу в диагональную форму. После дискретизации и преобразований Гаусса уравнение (3.6) преобразуется к виду:

$$\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right)_j=k_j\left[\frac{EI}{L^4}\left(\frac{u_{1,j-2}-4u_{1,j-1}+6u_{1,j}-4u_{1,j+1}+u_{1,j+2}}{\Delta x^4}\right)\right.$$
$$+\frac{T}{L^3}\left(\frac{u_{2,j+2}-2u_{2,j+1}+2u_{2,j-1}-u_{2,j-2}}{\Delta x^3}\right)+\frac{1}{L^2}N(x_jL,\frac{t}{\omega_0})\left(\frac{u_{1,j-1}-2u_{1,j}+u_{1,j+1}}{\Delta x^2}\right)$$
$$+\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial N(xL,t)}{\partial x}\right)_j\frac{u_{1,j+1}-u_{1,j-1}}{2\Delta x}-\frac{3EA}{(1-\nu)L^2}\left(\frac{u_{1,j+1}-u_{1,j-1}}{2\Delta x}\right)^2\left(\frac{u_{1,j-1}-2u_{1,j}+u_{1,j+1}}{\Delta x^2}\right)$$
$$-\frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)L^2}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{u_{2,j+1}-u_{2,j-1}}{2\Delta x}\right)^2\left(\frac{u_{1,j-1}-2u_{1,j}+u_{1,j+1}}{\Delta x^2}\right)+\\ 2\left(\frac{u_{2,j+1}-u_{2,j-1}}{2\Delta x}\right)\left(\frac{u_{2,j-1}-2u_{2,j}+u_{2,j+1}}{\Delta x^2}\right)\left(\frac{u_{1,j+1}-u_{1,j-1}}{2\Delta x}\right)\end{array}\right]$$
$$-\frac{hP_0\kappa}{L}\left(\bar{M}\left(\frac{u_{1,j+1}-u_{1,j-1}}{2\Delta x}\right)-\frac{\kappa+1}{4}\bar{M}^2\left(\frac{u_{1,j+1}-u_{1,j-1}}{2\Delta x}\right)^2+\frac{\kappa+1}{12}\bar{M}^3\left(\frac{u_{1,j+1}-u_{1,j-1}}{2\Delta x}\right)^3\right)$$
$$\left.-\rho A\left(\Omega^2u_{1,j}-2\Omega\omega_0\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)_j\right)+\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{L}\left(k_m^su_{1,j}+\omega_0c_m^s\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)_j\right)\delta\left(x_j-x_m^s\right)\right], \tag{3.10}$$

где k_j – коэффициент преобразований Гаусса, шаг сетки $\Delta x = x_{j+1} - x_j$, $j = \overline{2, N-3}$. Для удобства нижний индекс в x_3 опущен. Дискретная форма уравнения (3.7) выведена аналогичным образом и записана в Приложении А.

Уравнения (3.6)-(3.7) в краевых точках аппроксимируются в соответствии с граничными условиями (3.8): первые два условия используются для аппроксимации уравнений в точках $j = 0, N-1$, вторые два условия используются для аппроксимации уравнений в точках $j = 1, N-2$ (см. Приложение А).

3.1.2 Детали численной реализации

Согласно МСП, непрерывное решение $\overline{u}(x,t)$ заменяется сеточной функцией $\overline{u}(x_j, t_i) = \overline{u}_j(t_i)$, определенной на равномерной сетке $\varphi = \{(x_j, t_i) : x_j = j\Delta x,\ j = \overline{0, N-1};\quad t_i = i\Delta t,\ i = \overline{0, \tau},\quad \tau = \frac{T}{\Delta t}\}$, где T – расчетное время, Δx – шаг по пространству, N – число сегментов, τ – число итераций по времени, Δt – временной шаг.

При моделировании глубокого бурения ($L = 1000\text{m}$) используется 501 узел, что признано оптимальным с точки зрения соотношения времени расчета и точности; для длины $L = 100\text{m}$ плотность сетки составляет 201 узел. Физические параметры, при которых проводились расчеты, приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Физические параметры для численного расчета

Параметр	Значение
1	2
Модуль Юнга, E	2.1×10^{11} Па
Плотность материала бурильной колонны, ρ	7800 кг/м^3
Коэффициент Пуассона, ν	0.28
Внешний диаметр бурильной колонны, d_1	0.2 м
Внутренний диаметр бурильной колонны, d_2	0.12 м
Площадь поперечного сечения бурильной колонны, A	2.01×10^{-2} м^2
Осевой момент инерции, I	6.84×10^{-5} м^4
Крутящий момент, M	10^4 Нм
Угловая скорость вращения бурильной колонны, Ω	0.5 рад/с

Продолжение таблицы 3.1

1	2
Давление невозмущенного потока газа, P_0	1.013×10^3 Па
Число Маха, $\bar{M}$	2.5
Толщина стенок колонны, h	0.04 м
Показатель политропы, κ	1.4
Коэффициент демпфирования, c_m^s	$0\,\text{Н}\cdot\text{с/м}$
Частота внешней нагрузки, ω	0.33 рад/с
Ускорение свободного падения, g	9.81 м/с^2
Шаг по времени, Δt	5×10^{-4} с

Продольная сжимающая нагрузка $\bar{N}(x,t)$ рассматривалась аналогично задаче из предыдущего параграфа как сумма постоянной N_0 и переменной составляющих $N_t\Phi(t)$, где $\Phi(t)=\sin(\omega t)$ – функция, характеризующая характер нагружения

Для условий неглубокого бурения проводится анализ влияния собственного веса бурильной колонны на её перемещения с учетом наличия стабилизаторов. В этих целях продольная нагрузка была дополнена гравитационной составляющей, изменяющейся по всей длине колонны. Таким образом, для описания воздействия внешних нагрузок на динамику системы используется следующее выражение:

$$N(x,t)=\bar{N}(x,t)+\rho Agx\,. \tag{3.11}$$

3.1.3 Анализ результатов численного моделирования

Рассмотрены следующие случаи расположения опорных стабилизаторов для анализа их влияния на динамику колонны: 1) один стабилизатор в серединном поперечном сечении $x_1^s=0.5L$; 2) два стабилизатора в сечения $x_1^s=0.25L,\ x_2^s=0.75L$; 3) три стабилизатора в сечениях $x_1^s=0.25L, x_2^s=0.5L, x_3^s=0.75L$.

На рисунке 3.2 показаны поперечные смещения u_1 и u_2 в серединном сечении колонны длиной $L=1000$ м за 100 секунд при наличии двух стабилизаторов.

Согласно полученным графикам, характер колебаний для обеих компонент пространственного перемещения идентичен, при этом наблюдаются лишь незначительные различия в их периодах и максимальных амплитудах. На

рисунке 3.3 проиллюстрированы вибрации бурильной колонны в двух плоскостях при различных значениях начальных скоростей C_1 и C_2.

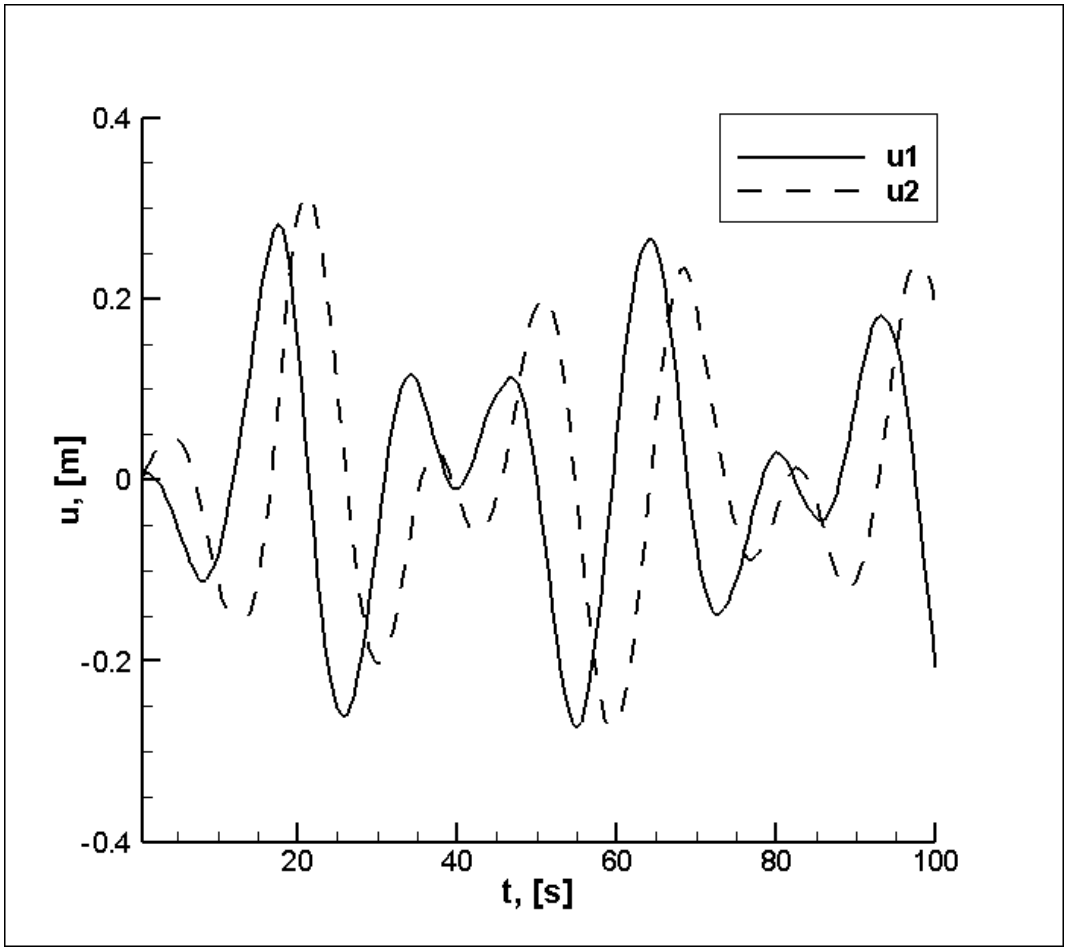
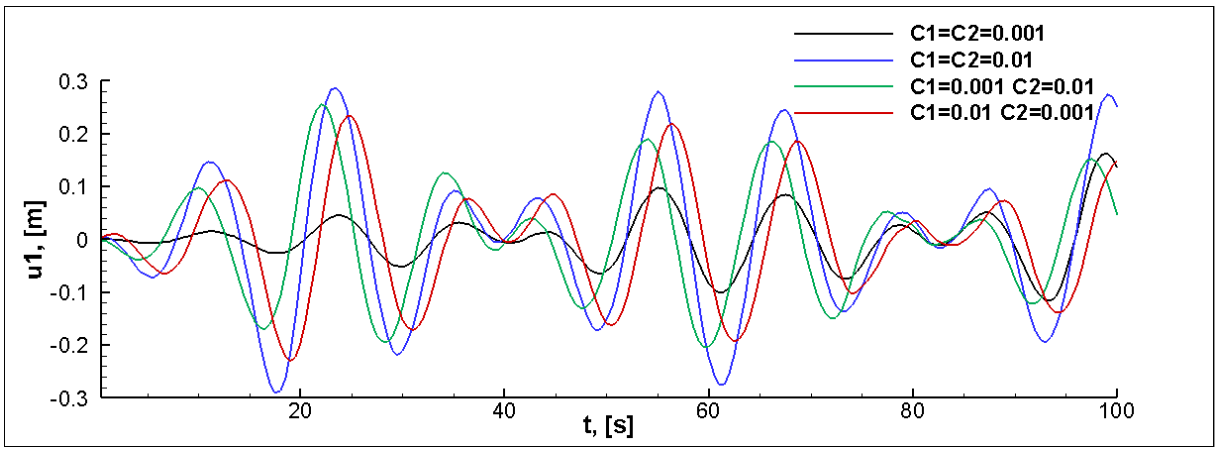
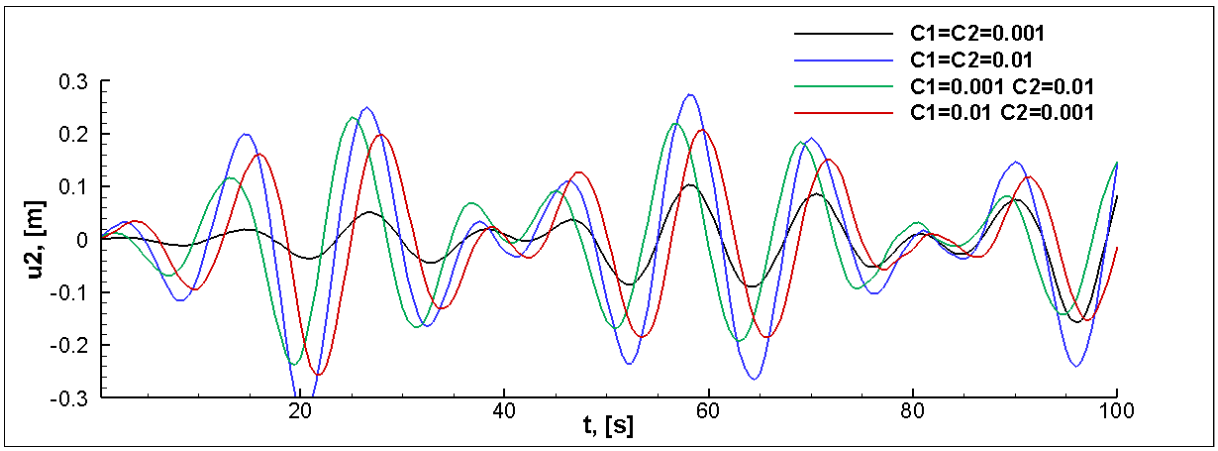


Рисунок 3.2 – Поперечные перемещения в серединном сечении $x = 0.5L$

Установлено, что различие в значениях констант $C_1 = 0.001$ м/с, $C_2 = 0.01$ м/с и $C_1 = 0.01$ м/с, $C_2 = 0.001$ м/с приводит к снижению амплитуды примерно на 15 % по сравнению со случаем их равенства $C_1 = C_2 = 0.01$ м/с (рисунок 3.3). При минимальных значениях начальных скоростей смещения сечения стержня ($C_1 = C_2 = 0.001$ м/с) зафиксировано резкое падение интенсивности поперечных вибраций. Таким образом, численные результаты подтверждают, что ограничение начальной скорости движения колонны позволяет существенно минимизировать амплитуду её пространственных колебаний, обеспечивая более безопасный режим бурения скважин.



a)



b)

Рисунок 3.3 – Перемещения колонны в плоскостях a) Ox_1x_3 и b) Ox_2x_3 для различных значений C_1, C_2

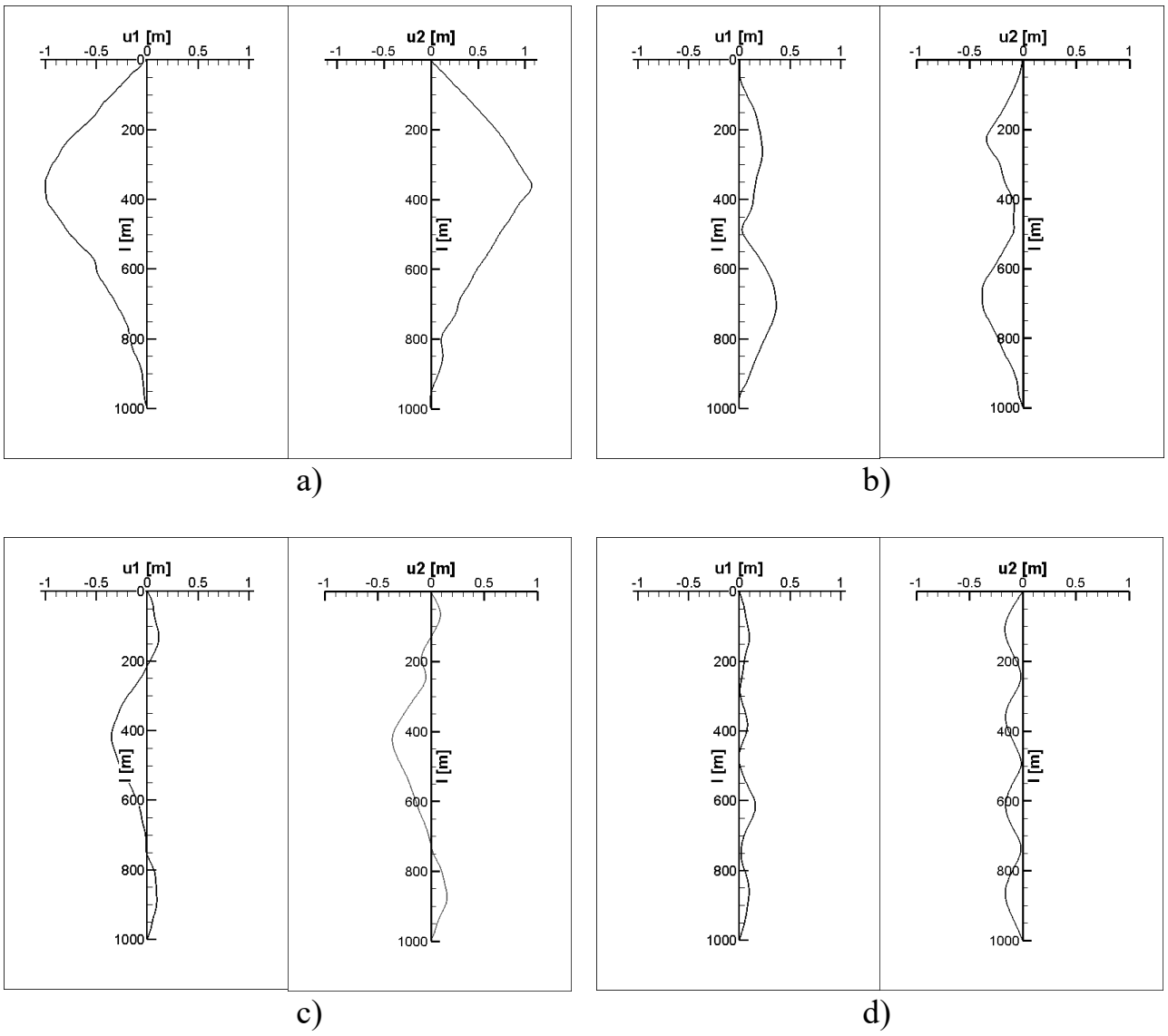
В ходе численного эксперимента был проведен анализ пиковых амплитуд смещения серединного сечения на интервале 100 секунд для различных схем расстановки стабилизаторов, а также для случая их отсутствия (см. таблицу 3.2). Выявлено, что установка одного, двух и трех стабилизаторов снижает максимальные перемещения колонны в 2,75, 2,85 и 6,31 раза соответственно. Стоит отметить, что разница в эффективности между использованием одного и двух стабилизаторов незначительна и составляет всего 3,6%. Следовательно, размещение одного стабилизатора в центре колонны более рационально, чем установка двух в точках $x_1^s = 0.25L$, $x_2^s = 0.75L$, так как добавление второй опоры не дает ощутимого снижения амплитуды, но увеличивает затраты на производство и монтаж. Значительный эффект (снижение на 84 %) достигается при использовании трех стабилизаторов. Полученные данные подчеркивают необходимость дальнейших исследований для поиска оптимальной конфигурации опор с целью стабилизации процесса проходки.

Таблица 3.2 – Максимальные отклонения бурильной колонны в зависимости от места установки и количества стабилизаторов на промежутке 100 с, $L = 1000$ м

Место установки стабилизатора	Нет стабилизаторов	$x_1^s = 0.5L$	$x_1^s = 0.25L,$ $x_2^s = 0.75L$	$x_1^s = 0.25L,$ $x_2^s = 0.5L,$ $x_3^s = 0.75L$
Макс. перемещения $\lvert u_1 \rvert$ [м]	1.00501	0.364957	0.352325	0.159186
Макс. перемещения $\lvert u_2 \rvert$ [м]	1.07443	0.382488	0.362208	0.165709

На рисунке 3.4 изображены профили перемещений бурильной колонны в моменты их максимального отклонения от оси на промежутке времени 100 секунд (см. таблицу 3.2). Анализ рисунка 3.4 подтверждает значительное уменьшение амплитуды колебаний при использовании стабилизаторов. В случае отсутствия стабилизаторов профиль изгиба соответствует классической форме деформации балки Эйлера (рисунок 3.4, a). Введение в конструкцию опорных стабилизаторов не только изменяет геометрию изгиба, но и существенно снижает размах колебаний, особенно в зонах, прилегающих к точкам установи стабилизаторов (рисунок 3.4, b-d). Расчеты проводились для осевого сжатия $\bar{N}(x,t) = 1.2 \times 10^3 + 10^3 \sin(0.33t)$ Н и угловой скорости вращения $\Omega = 0.33$ рад/с.

Исследована динамика перемещений в различных сечениях для случаев отсутствия стабилизаторов (рисунок 3.5, a-b) и установки одного центрального стабилизатора (рисунок 3.5, c-d). Установлено, что общая структура колебательного процесса после монтажа стабилизатора сохраняется. На рисунке 3.5, c-d заметно небольшое изменение периода колебаний, а также существенное уменьшение их амплитуды в сечениях $0.25L$ и $0.75L$. В точке установки стабилизатора ($x_1^s = 0.5L$) амплитуда смещений остается близкой к нулю на всем временном интервале.



a) стабилизаторы отсутствуют,

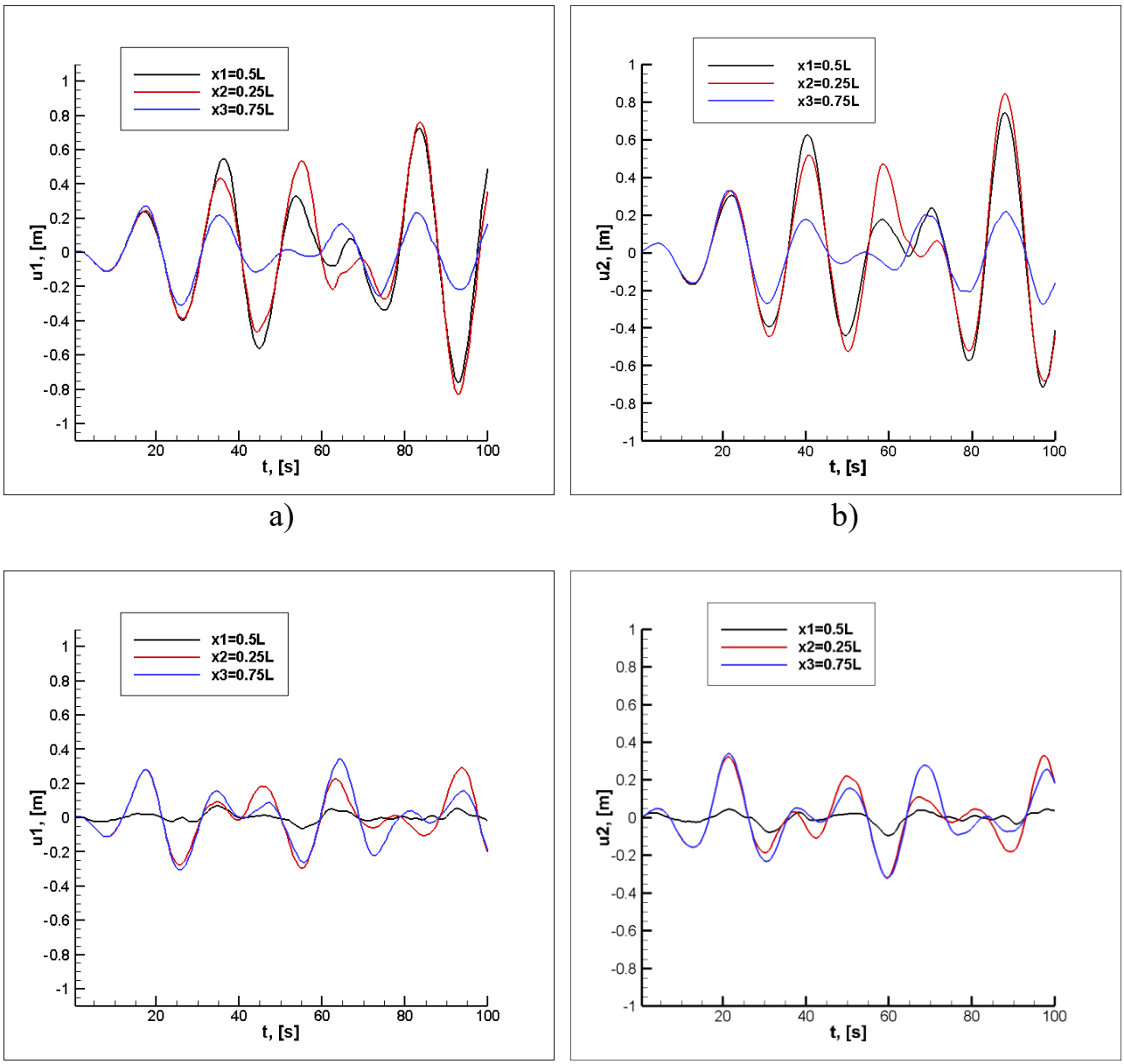
b) наличие одного стабилизатора в $x_1^s = 0.5L$,

c) наличие двух стабилизаторов $x_1^s = 0.25L, x_2^s = 0.75L$,

d) наличие трех стабилизаторов в $x_1^s = 0.25L, x_2^s = 0.5L, x_3^s = 0.75L$

для $L = 1000$м, $k_m^s = 10^3$ Н/м за $t = 100$ с

Рисунок 3.4 – Профили максимальных перемещений бурильной колонны для различных случаев установки стабилизаторов



a), b) стабилизаторы отсутствуют,
c), d) наличие одного стабилизатора в $x_1^s = 0.5L$
при $L = 1000$ м, $k_m^s = 10^3$ Н/м

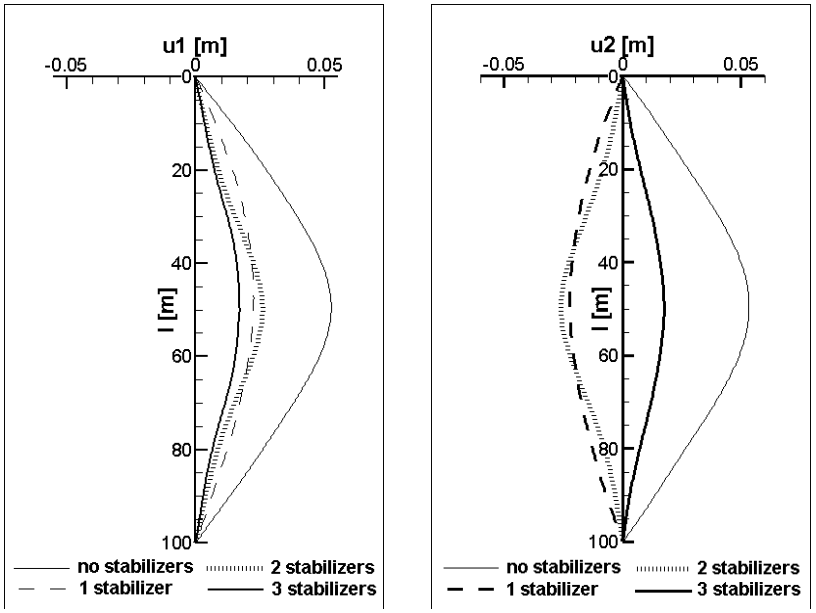
Рисунок 3.5 – Перемещения бурильной колонны в различных сечениях для случаев наличия и отсутствия стабилизаторов

Следующим этапом исследовалось влияние стабилизаторов на динамику системы в случаях неглубинного бурения, когда длина колонны составляет менее 500 метров, на примере колонны длиной $L = 100$ м с угловой скоростью вращения $\Omega = 0.5$ рад/с и величиной осевого сжатия $\bar{N}(x,t) = 1.2 \times 10^3 + 10^3 \sin(0.33t)$ Н. Аналогично случаю глубинного бурения были найдены значения максимальных амплитуд поперечного смещения

колонны на промежутке времени 100 секунд, представленные в таблице 3.3. Рисунок 3.6 демонстрирует перемещения бурильной колонны по длине в момент максимального отклонения от оси за промежуток времени 100 секунд. Данные графики наглядно демонстрируют, как присутствие стабилизаторов уменьшает поперечные перемещения бурильной колонны.

Таблица 3.3 – Максимальные перемещения $|u_1|$, $|u_2|$ в зависимости от числа и места расположения стабилизаторов при 100 с, $L = 100$ м

Место установки стабилизатора	Нет стабилизаторов	$x_1^s = 0.5L$	$x_1^s = 0.25L,$ $x_2^s = 0.75L$	$x_1^s = 0.25L,$ $x_2^s = 0.5L,$ $x_3^s = 0.75L$
Макс. перемещения $\|u_1\|$ [м]	0.0533575	0.0237907	0.0267014	0.019543
Макс. перемещения $\|u_2\|$ [м]	0.0532982	0.0233162	0.026656	0.0201195



a) b)

a) в плоскости Ox_1x_3, b) в плоскости Ox_2x_3

Рисунок 3.6 – Максимальные перемещения бурильной колонны за $t = 100$ с с разным числом стабилизаторов при $k_m^s = 10^4$ Н/м

Анализ представленных зависимостей показывает, что включение одного стабилизатора в систему обеспечивает подавление амплитуды колебаний на 55 %. Примечательно, что схема с двумя стабилизаторами оказывается на 5 %

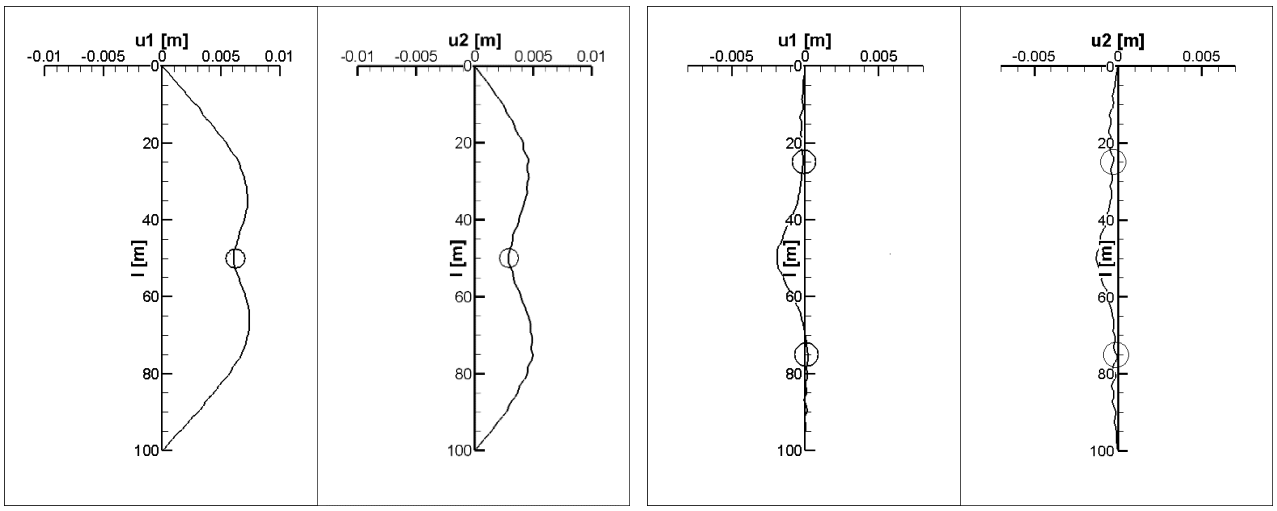
менее эффективной. Данный феномен объясняется спецификой размещения: локализация стабилизаторов вблизи концов колонны минимизирует изгиб ближе к концам колонны, что приводит к увеличению изгиба в центральной части. Использование трех стабилизаторов позволяет достичь почти трехкратного снижения максимальной амплитуды. Полученные данные подтверждают целесообразность стабилизации как при глубоком, так и при неглубинном бурении, при этом эффективность стабилизаторов возрастает с ростом длины бурильной колонны и количества стабилизаторов.

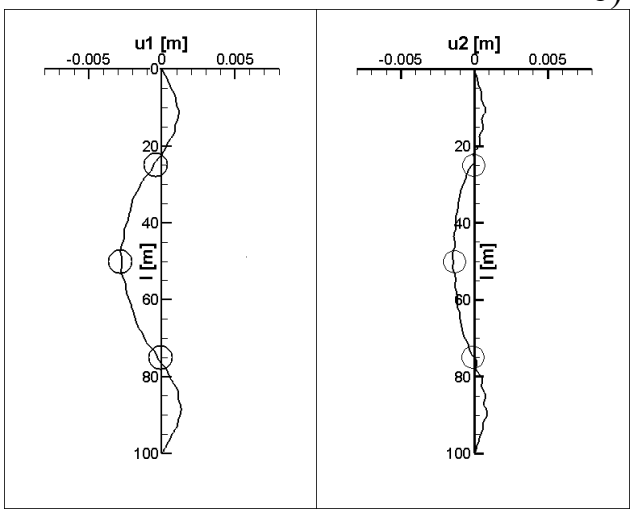
В сравнении с глубоким бурением (рисунок 3.4), где влияние опорных стабилизаторов на профиль изгиба выражено отчетливо, динамика колонны длиной $L = 100$ м характеризуется иными закономерностями. Установлено, что даже в отсутствие стабилизации максимальный прогиб системы составляет около 5,3 см. На рисунке 3.7 представлены профили изгиба бурильной колонны при варьировании числа стабилизаторов в момент времени $t = 100$ с. Примечательно, что в моменты спада амплитуды минимальные значения смещений локализуются именно в тех сечениях, где установлены ограничители (выделены окружностями).

Таблица 3.4 – Уровень демпфирования вследствие влияния стабилизаторов при $L = 100$ м, $k_m^s = 10^4$ Н/м

Место установки стабилизатора		$x_1^s = 0.5L$	$x_1^s = 0.25L$, $x_2^s = 0.75L$	$x_1^s = 0.25L$, $x_2^s = 0.5L$, $x_3^s = 0.75L$
Коэффициенты демпфирования для	$\lvert u_1 \rvert$	1.20	1.20	1.39
	$\lvert u_2 \rvert$	1.22	1.18	1.63

Моделирование стабилизатора осуществляется путем введения локального ограничителя смещений с коэффициентом жесткости k_m^s, величина которого определяется конструктивными особенностями элемента. Данный параметр имеет определяющее значение: использование материалов с низкими жесткостными характеристиками существенно снижает эффективность модели. Установлено, что значение $k_m^s = 10^3$ Н/м является достаточным для условий глубокого бурения, однако оказывается неэффективным при малых глубинах проходки. Согласно рисунку 3.8, во всех расчетных сценариях как при наличии стабилизации, так и при их отсутствии пиковые значения поперечных перемещений фиксируются в центральном сечении бурильной колонны. Наблюдения подтверждаются значениями таблицы 3.4, где указаны коэффициенты демпфирования при разном числе и месте расположения стабилизаторов.

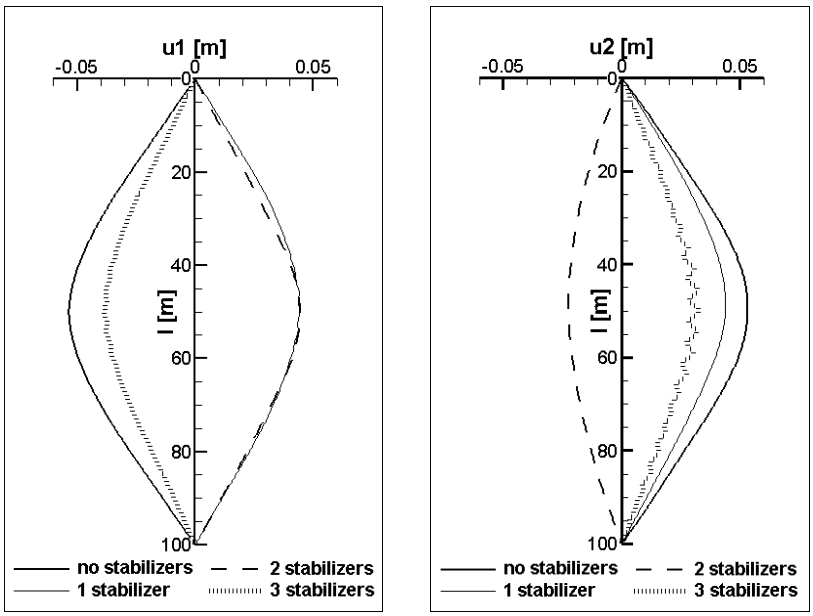




a) $x_1^s = 0.5L,$ b) $x_1^s = 0.25L, x_2^s = 0.75L,$ c) $x_1^s = 0.25L, x_2^s = 0.5L, x_3^s = 0.75L$

Рисунок 3.7 – Изгиб бурильной колонны для разных случаев установки стабилизаторов при $L = 100$ м, t=100 с, $k_m^s = 10^4$ Н/м

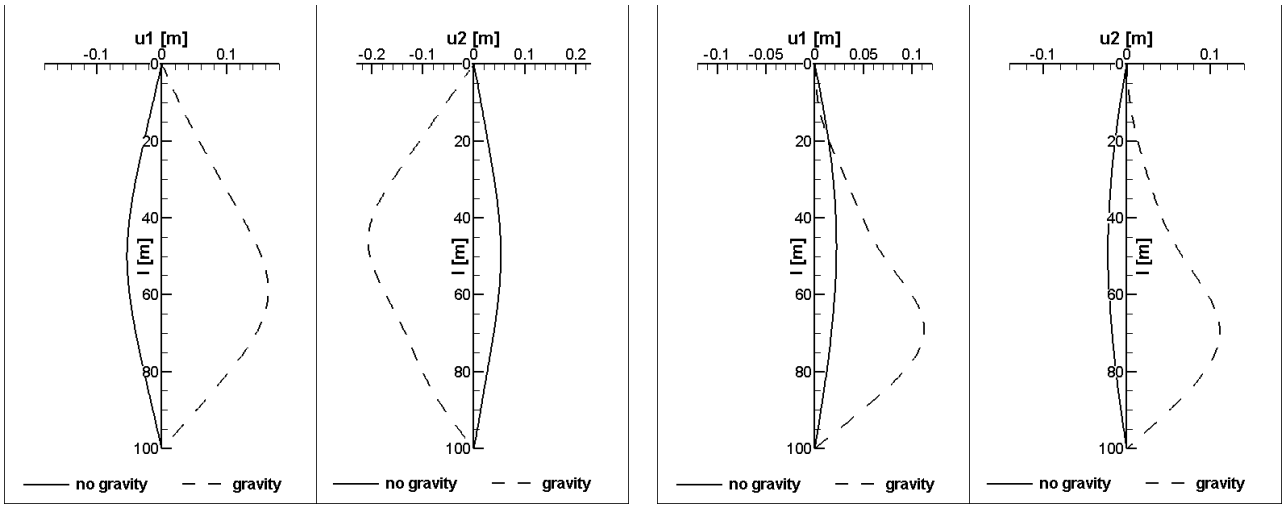
Исследовано влияние распределенного по длине собственного веса колонны как дополнительного компонента функции внешнего нагружения. Согласно рисунку 3.9, учет силы тяжести приводит к существенному увеличению вибраций и качественному изменению профиля изгиба. В нижней части стержня, где сосредоточена наибольшая масса, наблюдается выпучивание, то есть точка максимального прогиба смещается к нижней части колонны. Установка стабилизатора в срединном сечении способствует приближению деформированной оси к нейтральному положению в данной точке.



a) b)

b)

Рисунок 3.8 – Максимальные перемещения бурильной колонны для разного числа стабилизаторов за $t = 100$ с, $k_m^s = 10^3$ Н/м, a) u_1 и b) u_2

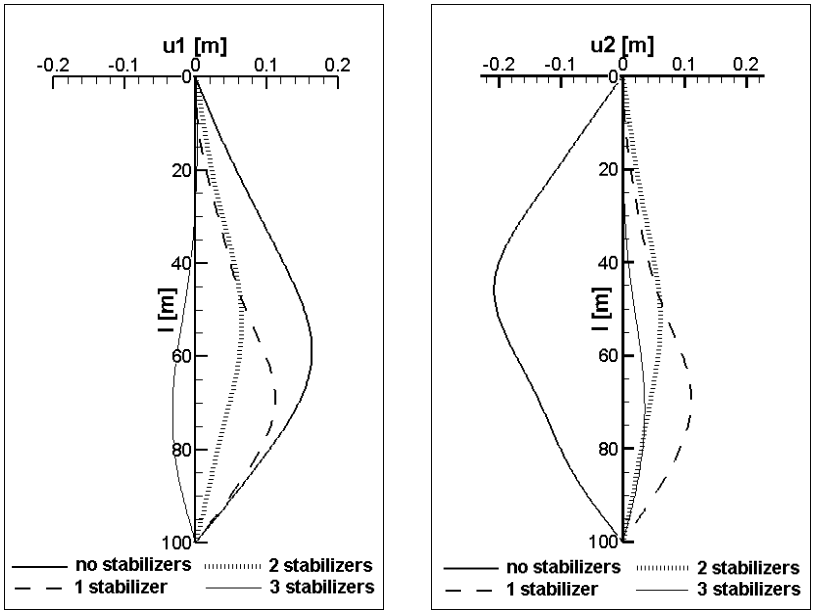


a) b)

a) стабилизаторы отсутствуют, b) один стабилизатор $x_1^s = 0.5L$

Рисунок 3.9 – Влияние собственного веса на профиль перемещений бурильной колонны для разных случаев установки стабилизаторов при $L = 100$ м, $k_m^s = 10^4$ Н/м

Аналогично было проведено исследование максимальных отклонений за промежуток времени 200 секунд при разном числе и месте расположения стабилизаторов с целью оценки эффективности их включения для случая учета собственного веса. Результаты представлены на рисунке 3.10, а количественные данные вычислительных экспериментов представлены в таблице 3.5.



a) b)

Рисунок 3.10 – Максимальные перемещения колонны a) u_1 и b) u_2 за промежуток $t = 200$ с с учетом влияния собственного веса для различного числа стабилизаторов при $k_m^s = 10^4$ Н/м

Максимальное снижение амплитуды наблюдается при использовании трех стабилизаторов, почти в пять раз для u_1 и 5,8 раз для u_2. Наличие одного и двух стабилизаторов приводит к кратному уменьшению амплитуд, при этом профиль изгиба меняется, наблюдается смещение точек максимального перемещения к нижней части колонны за счет учета действия собственного веса.

Таблица 3.5 – Максимальные амплитуды перемещений бурильной колонны в зависимости от числа стабилизаторов при $t = 200$ с, $L = 100$ м с учетом влияния собственного веса

Место установки стабилизатора	Нет стабили-заторов	$x_1^s = 0.5L$	$x_1^s = 0.25L,$ $x_2^s = 0.75L$	$x_1^s = 0.25L, x_2^s = 0.5L,$ $x_3^s = 0.75L$
Макс. перемещения $\lvert u_1 \rvert$ [м]	0.164057	0.112217	0.0647234	0.032945
Макс. перемещения $\lvert u_2 \rvert$ [м]	0.20774	0.11122	0.0607921	0.0356643

Для анализа характера колебаний срединного сечения бурильной колонны при различном количестве стабилизаторов были построены фазовые портреты в координатах перемещений u_1 и u_2 (рисунок 3.11).

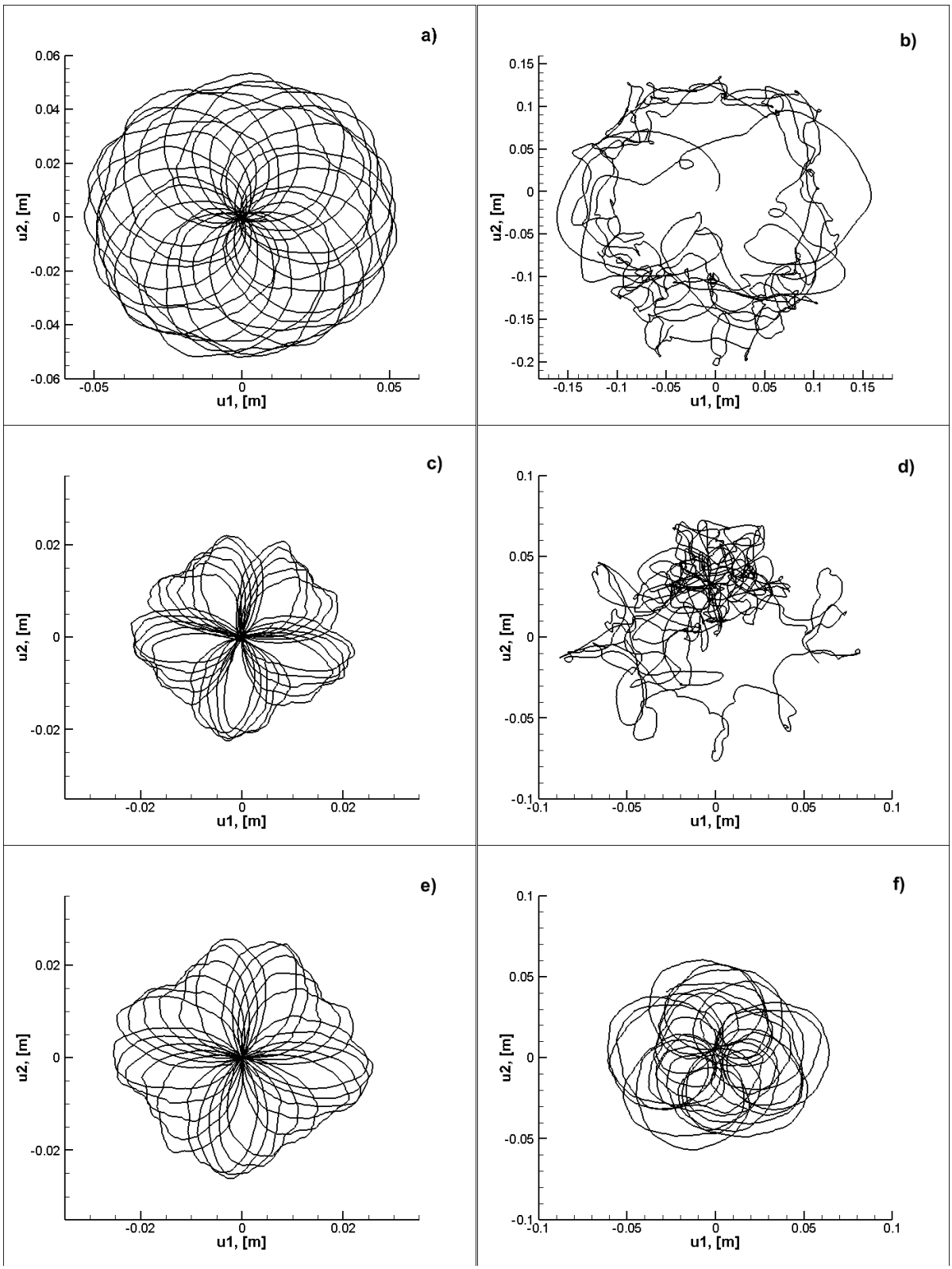
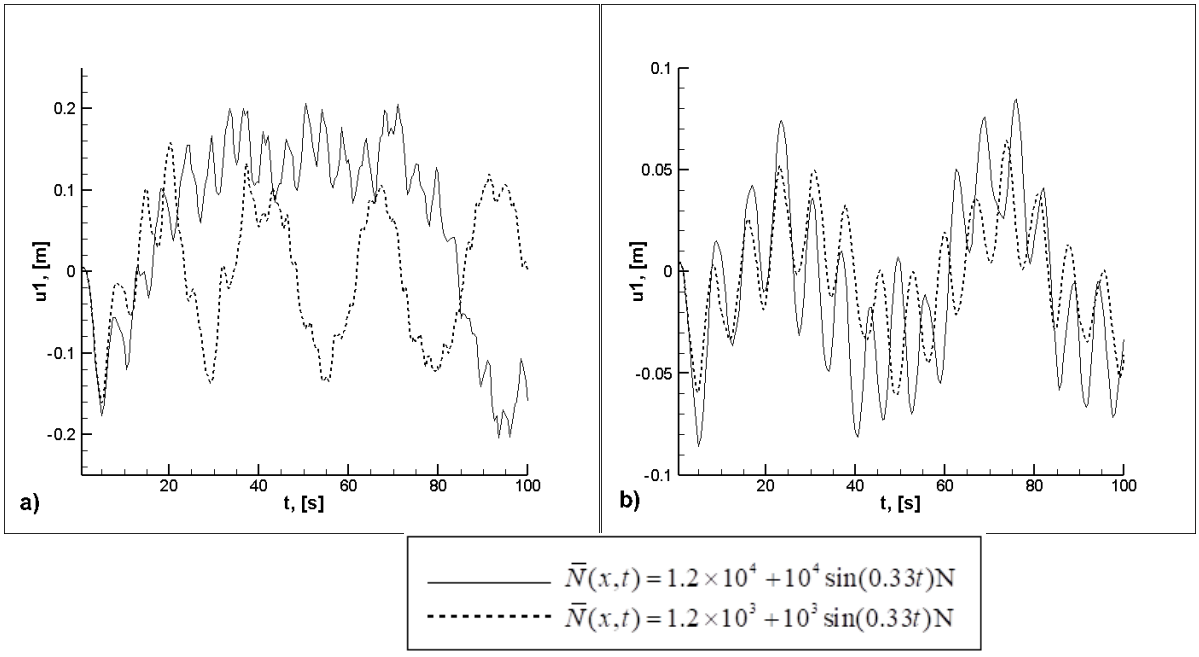


Рисунок 3.11 – Фазовые траектории в пространстве перемещений в серединном сечении для случаев a) без учета веса, нет стабилизаторов, $t = 200$ с , b) с учетом собственного веса, без стабилизаторов, $t = 200$ с, c) без учета веса, один стабилизатор $x_1^s = 0.5L$, $t = 100$ с, d) с учетом веса, один стабилизатор $x_1^s = 0.5L$, $t = 200$ с, e) без учета веса, два стабилизатора $x_1^s = 0.25L, x_2^s = 0.75L$, $t = 100$ с, f) с учетом веса, два стабилизатора $x_1^s = 0.25L, x_2^s = 0.75L$, $t = 200$ с для колонны $L = 100$м, $k_m^s = 10^4$Н/м

В ходе исследования сравнивались модели без учета и с учетом собственного веса колонны. Установлено, что включение гравитационного фактора значительно приближает модель к реальным условиям, внося в фазовые траектории асимметрию и снижая их структурированность. Возникающее при этом хаотическое поведение соответствует стохастическим процессам, характерным для реального бурения. Анализ графиков позволил оценить рост амплитуды вибраций при учете веса как в случае отсутствия опорных стабилизаторов (рисунок 3.11, b), так и при использовании одного (рисунок 3.11, d) или двух стабилизаторов (рисунок 3.11, f). Примечательно, что установка двух стабилизаторов в сечениях $x_1^s = 0.25L$ и $x_2^s = 0.75L$ обеспечивает переход к регулярным (нехаотическим) колебаниям в середине колонны даже при учете её веса, в отличие от конфигураций без стабилизаторов или с одним стабилизатором.

Дополнительно исследовано влияние десятикратного возрастания осевого сжимающего усилия на колонну длиной $L = 100$ м, $k_m^s = 10^4$ Н/м, $\Omega = 0.3$ рад/с в течение 100 секунд с учетом её собственного веса. Результаты моделирования перемещений представлены на рисунке 3.12.



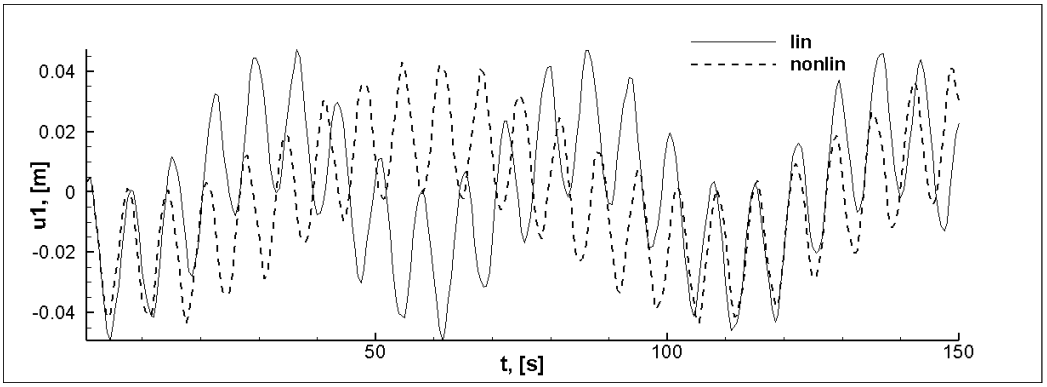
a) отсутствие стабилизаторов b) наличие двух стабилизаторов в $x_1^s = 0.25L,\ x_2^s = 0.75L$

Рисунок 3.12 – Влияние осевой нагрузки на колебания первой компоненты u_1 в серединном сечении для разных случаев установки стабилизаторов

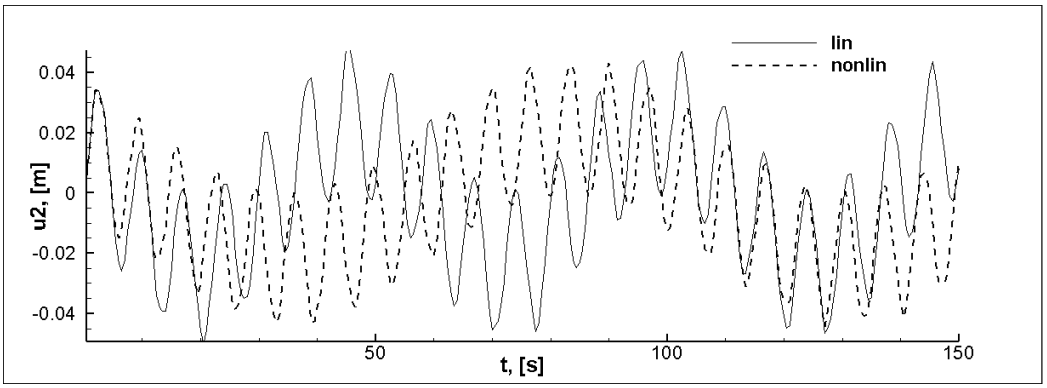
Установлено, что в системе без стабилизаторов повышение нагрузки провоцирует рост амплитуды, а также изменение периодичности и формы

колебательного процесса (рисунок 3.12, а). Напротив, использование двух стабилизаторов позволяет сохранить характер колебаний в промежуточном сечении практически неизменным, при этом прирост амплитуды остается незначительным (рисунок 3.12, б). Следовательно, включение стабилизаторов в компоновку бурильной колонны гарантирует сохранение динамической устойчивости системы даже при кратных продольных перегрузках.

В завершение был проведен сравнительный анализ исследуемой нелинейной модели (4-6), учитывающей геометрическую нелинейность (конечные деформации) и эффекты газового потока, с её линейным аналогом (рисунок 3.13).



a)



b)

Рисунок 3.13 – Влияние нелинейности на вибрации бурильной колонны при наличии двух стабилизаторов

Установлено, что линеаризация модели приводит к завышению амплитуды колебаний примерно на 15% и дает лишь грубое приближение реального физического процесса. Напротив, рассмотрение задачи в нелинейной постановке способствует стабилизации решения. В работе [49] авторами подробно описаны нелинейные эффекты, сопровождающие динамику бурильной колонны; показано, что именно нелинейность газового потока вносит определяющий вклад в стабилизацию системы. Более того, рациональный выбор параметров газа позволяет не только поддерживать устойчивость, но и снижать амплитуду пространственных поперечных вибраций. В то же время анализ аналогичных

конструкций с вращающимися трубами, транспортирующими жидкость, показал, что рост скорости потока может, напротив, увеличить параметрический резонанс системы [52].

В параграфа 3.1 рассмотрено влияние стабилизаторов и внешних факторов на нелинейную динамику бурильной колонны в потоке газа с использованием метода сосредоточенных параметров (МСП). Для получения численного решения нелинейной модели бурильной колонны, выведенной с использованием нелинейной теории упругости В. В. Новожилова и вариационного принципа Гамильтона, применялся метод Рунге-Кутты четвертого порядка. Согласно полученным результатам, применение стабилизаторов позволило значительно снизить амплитуду колебаний бурильной колонны. С увеличением длины колонны эффективность стабилизаторов увеличивается. Наиболее эффективным оказалось расположение стабилизатора в среднем сечении бурильной колонны. Также была показана важность учета коэффициента жесткости, связанного с конструктивными свойствами стабилизаторов. При учете собственного веса бурильной колонны как дополнительного компонента внешней нагрузки выявлен значительный рост амплитуды колебаний с максимальным прогибом в нижней части колонны. Более того, при учете собственного веса фазовые траектории в пространстве перемещений стали менее структурированными и более асимметричными, появилось хаотическое поведение системы. Выбор оптимального количества стабилизаторов, в свою очередь, позволил сохранить устойчивость системы даже при десятикратном увеличении продольной сжимающей силы.

Это доказывает значимость изучения влияния демпфирующих элементов на буровую систему и эффективность применения МСП при моделировании колебаний бурильной колонны с учетом нелинейных факторов и внешней среды. Использование параллельных технологий привело к значительному сокращению времени численных расчетов, что позволит проводить дальнейшие исследования гораздо более сложных динамических систем. Полученные результаты являются основой для будущего применения МСП при изучении нелинейной динамики бурильной колонны с учетом ее неоднородной структуры, локальных и точечных нагрузок, а также стохастических явлений.

3.2 Моделирование нелинейной динамики бурильной колонны с учетом физически нелинейной континуальной демпфирующей муфты

Данный параграф посвящен исследованию поперечных перемещений бурильной колонны с учетом физически нелинейной демпфирующей муфты-виброгасителя, моделируемой как сплошное тело.

3.2.1 Математическая модель связанных колебаний системы «колонна-муфта»

Рассматриваются плоские поперечные перемещения бурильной колонны $u^{(c)}(z,t)$, вращающейся с угловой скоростью Ω в потоке сверхзвукового газа под действием осевой сжимающей нагрузки и собственного веса. Математическая модель колонны выводилась в [49] с учетом геометрической нелинейности; нелинейные члены выводились в соответствии с теорией упругости В. В. Новожилова [21], воздействие газового потока описано с использованием поршневой теории [108, 109]. Схема нагружения представлена на рисунке 3.14.

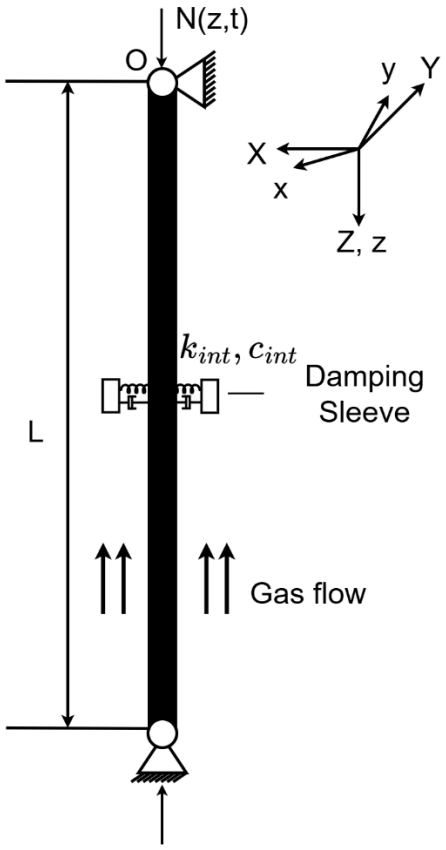


Рисунок 3.14 – Схема нагружения колонны

Математическая модель бурильной колонны:

$$\rho A\frac{\partial^2 u^{(c)}}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 u^{(c)}}{\partial z^4}-\rho I\frac{\partial^4 u^{(c)}}{\partial z^2\partial t^2}-\rho A\Omega^2 u^{(c)}+\frac{\partial}{\partial z}\left(N(z,t)\frac{\partial u^{(c)}}{\partial z}\right)$$
$$-\frac{EA}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u^{(c)}}{\partial z}\right)^3+F_{\text{gas}}\left(1-\chi(z)\right)+F_{\text{int}}\chi(z)=0 \qquad (3.12)$$

где $\chi(z)=H(z-z_{start})-H(z-z_{end})$ – характеристическая функция, определяющая место установки муфты, $H(x)$ – функция Хевисайда.

Предполагается, что в узлах крепления муфты действие газового потока передается через демпфирующую муфту: прямое аэродинамическое воздействие на бурильную колонну явно не включено в уравнение движения в этих узлах. Поперечные перемещения муфты обозначим $u^{(s)}(z,t)$. Воздействие газового потока определяется формулой:

$$F_{\text{gas}} = -hP_0\kappa\left(\bar{M}\frac{\partial u^{(q)}}{\partial z} - \frac{\kappa+1}{4}\bar{M}^2\left(\frac{\partial u^{(q)}}{\partial z}\right)^2 + \frac{\kappa+1}{12}\bar{M}^3\left(\frac{\partial u^{(q)}}{\partial z}\right)^3\right), \tag{3.13}$$

где $u^{(q)}(z,t)$ – поперечные перемещения, в месте установки муфты $q=s$, по оставшейся длине бурильной колонны $q=c$.

Муфта динамически связана с колонной посредством вязкоупругих сил взаимодействия F_{int}. Сила моделировалась на основе относительного движения физически нелинейногого демпфера и колонны, возникающего при их совместном вращении, и описывается выражением:

$$F_{\text{int}} = k_{\text{int}}(u^{(c)} - u^{(s)}) + c_{\text{int}}\left(\frac{\partial u^{(c)}}{\partial t} - \frac{\partial u^{(s)}}{\partial t}\right), \tag{3.14}$$

где k_{int} – коэффициент упругого взаимодействия c_{int} – коэффициент вязкого взаимодействия муфты с колонной.

Демпфирующая муфта моделируется как полая стержневая конструкция, изготовленная из изотропного, квазинесжимаемого, физически нелинейного композита. Движение втулки описывается уравнением:

$$\begin{aligned}&\rho_s A_s\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial t^2} - \rho_s I_s\frac{\partial^4 u^{(s)}}{\partial z^2\partial t^2} - \rho_s A_s\Omega^2 u^{(s)} + \frac{E_s I_s}{2(\nu_s+1)}\frac{\partial^4 u^{(s)}}{\partial z^4} + \\ &\alpha\frac{\partial u^{(s)}}{\partial t} + F_{\text{nonlin}} + F_{\text{gas}} - F_{\text{int}} = 0.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Данная математическая модель описывает плоские поперечные колебания и учитывает вращение, эффективные свойства материала (модуль Юнга E_s, коэффициент Пуассона ν_s, плотность ρ_s), внутреннее демпфирование и взаимодействие с потоком газа.

Геометрическая нелинейность описывается в рамках теории В. В. Новожилова, тогда как нелинейное напряжённо-деформированное поведение учитывается с помощью гиперупругого потенциала Трелоара [59, 110], описывающего свойства упрочненного материала, характерного для резиноподобных матриц при больших деформациях. Нелинейные члены представлены выражением:

$$F_{\text{nonlin}} = \gamma_1 \frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u^{(s)}}{\partial z}\right)^4 + \gamma_2 \frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u^{(s)}}{\partial z}\right)^2 + \gamma_3 \frac{\partial^4 u^{(s)}}{\partial z^4}\left(\frac{\partial u^{(s)}}{\partial z}\right)^2 + \gamma_4 \frac{\partial u^{(s)}}{\partial z}\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial z^2}\frac{\partial^3 u^{(s)}}{\partial z^3} + \gamma_5 \left(\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial z^2}\right)^3, \quad (3.16)$$

где γ_i – коэффициенты, зависящие от физико-механических характеристик материала и геометрии муфты, их значения представлены в таблице 3.6. Данные члены описывают перераспределение энергии в физически и геометрически нелинейном теле.

Таблица 3.6 – Значение коэффициентов γ_i

γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5
$\frac{15E_sA_s}{8(1+\nu_s)}$	$-\frac{3E_sA_s}{2(1+\nu_s)}$	$-\frac{3E_sI_s}{4(1+\nu_s)}$	$-\frac{3E_sI_s}{(1+\nu_s)}$	$-\frac{3E_sI_s}{4(1+\nu_s)}$

Граничные условия колонны приняты в соответствии с шарнирным опиранием:

$$u^{(c)}(z,t)\Big|_{z=0,\,z=L} = 0, \qquad EI\frac{\partial^2 u^{(c)}(z,t)}{\partial z^2}\Big|_{z=0,\,z=L} = 0. \quad (3.17)$$

Для демпфирующей муфты принимаются граничные условия свободного конца:

$$E_sI_s\frac{\partial^2 u^{(s)}(z,t)}{\partial z^2}\Big|_{z=z_{\text{start}},\,z=z_{\text{end}}} = 0, \qquad E_sI_s\frac{\partial^3 u^{(s)}(z,t)}{\partial z^3}\Big|_{z=z_{\text{start}},\,z=z_{\text{end}}} = 0. \quad (3.18)$$

Начальные условия определим следующим образом:

$$\begin{aligned} &u^{(c)}(z,0) = 0, \quad \frac{\partial u^{(c)}(z,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = C_1, \quad 0 < z < L, \\ &u^{(s)}(z,0) = 0, \quad \frac{\partial u^{(s)}(z,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = C_1, \quad z_{\text{start}} < z < z_{end}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Продольная сжимающая нагрузка, создаваемая буровой установкой, может быть выражена как сумма постоянной составляющей N_0 и периодической по времени составляющей $N(t) = N_t \sin(\omega t)$, характеризующей режим приложения нагрузки. Собственный вес рассматривается как распределенная

сила тяжести; сила, действующая на сечение участка стержня длиной $L-z$, равна произведению погонной массы на ускорение свободного падения на длину участка. Суммарно продольная нагрузка представляется выражением:

$$N(z,t) = N_0 + N_t \sin(\omega t) - \rho A g (L - z). \tag{3.20}$$

3.2.2 Детали численной дискретизации

Численные результаты получены с использованием метода сосредоточенных параметров (МСП). Перед дискретизацией модель была приведена к безразмерному виду с использованием следующих масштабов:

$$u^{(c)} = L\tilde{u}^{(c)}, \qquad u^{(s)} = L\tilde{u}^{(s)}, \qquad z = L\tilde{z}, \qquad t = t_0\tilde{t}, \qquad t_0 = \sqrt{\frac{L^2\rho}{E}}. \tag{3.21}$$

После обезразмеривания система примет вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\rho A L^2}{t_0^2}\frac{\partial^2\tilde{u}^{(c)}}{\partial\tilde{t}^2} + \frac{EI}{L^2}\frac{\partial^4\tilde{u}^{(c)}}{\partial\tilde{z}^4} - \frac{\rho I}{t_0^2}\frac{\partial^4\tilde{u}^{(c)}}{\partial\tilde{z}^2\partial\tilde{t}^2} - \rho A\Omega^2 L^2\tilde{u}^{(c)} + N(L\tilde{u}^{(c)}, t_0\tilde{t})\frac{\partial^2\tilde{u}^{(c)}}{\partial\tilde{z}^2} \\ &+\rho A g L\frac{\partial\tilde{u}^{(c)}}{\partial\tilde{z}} - \frac{3EA}{1-\nu}\left(\frac{\partial\tilde{u}^{(c)}}{\partial\tilde{z}}\right)^2\frac{\partial^2\tilde{u}^{(c)}}{\partial\tilde{z}^2} + L\cdot F_{\text{gas}}(1-\chi) + L\cdot F_{\text{int}}\chi = 0, \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} &\rho_s A_s\frac{L^2}{t_0^2}\frac{\partial^2\tilde{u}^{(s)}}{\partial\tilde{t}^2} - \frac{\rho_s I_s}{t_0^2}\frac{\partial^4\tilde{u}^{(s)}}{\partial\tilde{z}^2\partial\tilde{t}^2} - \rho_s A_s\Omega^2 L^2\tilde{u}^{(s)} + \frac{E_s I_s}{2(\nu_s+1)L^2}\frac{\partial^4\tilde{u}^{(s)}}{\partial\tilde{z}^4} \\ &+\frac{\alpha L^2}{t_0}\frac{\partial\tilde{u}^{(s)}}{\partial\tilde{t}} + L\cdot F_{\text{nonlin}} - L\cdot F_{\text{gas}} - L\cdot F_{\text{int}} = 0, \end{aligned} \tag{3.23}$$

где

$$\begin{aligned} &F_{\text{gas}} = -hP_0\kappa\left[\bar{M}\frac{\partial\tilde{u}^{(q)}}{\partial\tilde{z}} - \frac{\kappa+1}{4}\bar{M}^2\left(\frac{\partial\tilde{u}^{(q)}}{\partial\tilde{z}}\right)^2 + \frac{\kappa+1}{12}\bar{M}^3\left(\frac{\partial\tilde{u}^{(q)}}{\partial\tilde{z}}\right)^3\right], \quad q\in\{c,s\}, \\ &F_{\text{int}} = k_{\text{int}}L(\tilde{u}^{(c)} - \tilde{u}^{(s)}) + \frac{c_{\text{int}}L}{t_0}\left(\frac{\partial\tilde{u}^{(c)}}{\partial\tilde{t}} - \frac{\partial\tilde{u}^{(s)}}{\partial\tilde{t}}\right), \\ &F_{\text{nonlin}} = \frac{\gamma_1}{L}\frac{\partial^2\tilde{u}^{(s)}}{\partial\tilde{z}^2}\left(\frac{\partial\tilde{u}^{(s)}}{\partial\tilde{z}}\right)^4 + \frac{\gamma_2}{L}\frac{\partial^2\tilde{u}^{(s)}}{\partial\tilde{z}^2}\left(\frac{\partial\tilde{u}^{(s)}}{\partial\tilde{z}}\right)^2 + \frac{\gamma_3}{L^3}\frac{\partial^4\tilde{u}^{(s)}}{\partial\tilde{z}^4}\left(\frac{\partial\tilde{u}^{(s)}}{\partial\tilde{z}}\right)^2 \\ &+\frac{\gamma_4}{L^3}\frac{\partial\tilde{u}^{(s)}}{\partial\tilde{z}}\frac{\partial^2\tilde{u}^{(s)}}{\partial\tilde{z}^2}\frac{\partial^3\tilde{u}^{(s)}}{\partial\tilde{z}^3} + \frac{\gamma_5}{L^3}\left(\frac{\partial^2\tilde{u}^{(s)}}{\partial\tilde{z}^2}\right)^3. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Граничные и начальные, соответственно:

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}^{(c)}(\tilde{z},\tilde{t})\big|_{\tilde{z}=0,\,\tilde{z}=1}=0, \qquad \frac{\partial^2\tilde{u}^{(c)}(\tilde{z},\tilde{t})}{\partial\tilde{z}^2}\Big|_{\tilde{z}=0,\,\tilde{z}=1}=0,\\
&\frac{\partial^2\tilde{u}^{(s)}(\tilde{z},\tilde{t})}{\partial\tilde{z}^2}\Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_{\text{start}},\,\tilde{z}=\tilde{z}_{\text{end}}}=0, \qquad \frac{\partial^3\tilde{u}^{(s)}(\tilde{z},\tilde{t})}{\partial\tilde{z}^3}\Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_{\text{start}},\,\tilde{z}=\tilde{z}_{\text{end}}}=0,\\
&\tilde{u}^{(c)}(\tilde{z},0)=0, \quad \frac{\partial\tilde{u}^{(c)}(\tilde{z},\tilde{t})}{\partial\tilde{t}}\Big|_{\tilde{t}=0}=\tilde{C}_1, \quad 0<\tilde{z}<1,\\
&\tilde{u}^{(s)}(\tilde{z},0)=0, \quad \frac{\partial\tilde{u}^{(s)}(\tilde{z},\tilde{t})}{\partial\tilde{t}}\Big|_{\tilde{t}=0}=\tilde{C}_1, \quad \tilde{z}_{\text{start}}<\tilde{z}<\tilde{z}_{\text{end}},
\end{aligned} \tag{3.25}$$

где $\tilde{C}_1 = C_1 t_0 / L$.

Бурильная колонна дискретизируется равномерной сеткой по пространству с шагом

$$\Delta z = \frac{L}{N-1}, \tag{3.26}$$

где N – число точек сетки вдоль колонны, узлы сетки находятся по формуле $z_j = j\Delta z,\ j = 0,1,\ldots,N-1$. Поле перемещений аппроксимируется в узлах сетки дискретной функцией

$$u^{(c)}(z_j,t) = u_j^{(c)}(t), \qquad j = 0,1,\ldots,N-1. \tag{3.27}$$

Муфта длиной $L_s = z_{\text{end}} - z_{\text{start}}$ установлена на интервале $[z_{\text{start}}, z_{\text{end}}]$, дискретизируется с аналогичным шагом по пространству Δz в M узлах

$$M = \frac{L_s}{\Delta z} + 1 \tag{3.28}$$

сеточной функцией

$$u^{(s)}(z_k,t) = u_k^{(s)}(t), \qquad k = 0,1,\ldots,M-1. \tag{3.29}$$

Индексы первой и последней точек бурильной колонны, совпадающих с муфтой, находятся по формуле, соответственно:

$$j_{\text{start}} = \frac{z_{\text{start}}}{\Delta z}, \qquad j_{\text{end}} = \frac{z_{\text{end}}}{\Delta z} = j_{\text{start}} + M - 1. \tag{3.30}$$

Узлы демпфирующей муфты индексируются независимо $k = 0,1,\ldots,M-1$ и связываются с узлами колонны следующим образом:

$$k = j - j_{\text{start}}, \qquad j_{\text{start}} \le j \le j_{\text{end}}. \tag{3.31}$$

Непрерывная характеристическая функция $\chi(z)$ заменяется разностным аналогом:

$$\chi_j = \begin{cases} 1, & j \in [j_{\text{start}}, j_{\text{end}}], \\ 0, & j \notin [j_{\text{start}}, j_{\text{end}}], \end{cases} \tag{3.32}$$

где $j = 0,\ldots,N-1$.

Для бурильной колонны разностные дискретные операторы для внутренних узлов сетки запишутся:

$$\begin{aligned}
(D_1 u^{(c)})_j &= \frac{u_{j+1}^{(c)} - u_{j-1}^{(c)}}{2\Delta z}, \quad 1 \le j \le N-2, \\
(D_2 u^{(c)})_j &= \frac{u_{j-1}^{(c)} - 2u_j^{(c)} + u_{j+1}^{(c)}}{\Delta z^2}, \quad 1 \le j \le N-2, \\
(D_3 u^{(c)})_j &= \frac{-u_{j+2}^{(c)} + 2u_{j+1}^{(c)} - 2u_{j-1}^{(c)} + u_{j-2}^{(c)}}{2\Delta z^3}, \quad 2 \le j \le N-3, \\
(D_4 u^{(c)})_j &= \frac{u_{j-2}^{(c)} - 4u_{j-1}^{(c)} + 6u_j^{(c)} - 4u_{j+1}^{(c)} + u_{j+2}^{(c)}}{\Delta z^4}, \quad 2 \le j \le N-3.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Учитывая нулевые перемещения в граничных точках, уравнение движения бурильной колонны (3.12) решается только для внутренних точек $j = 1,\ldots,N-2$. В граничных точках колонны с учётом граничных условий (3.17) дискретные операторы (3.33) принимают вид:

$$\begin{aligned}
(D_3 u^{(c)})_1 &= \frac{u_0^{(c)} - 2u_1^{(c)} + u_2^{(c)}}{\Delta z^3}, \\
(D_3 u^{(c)})_{N-2} &= \frac{-u_{N-3}^{(c)} + 2u_{N-2}^{(c)} - u_{N-1}^{(c)}}{\Delta z^3}, \\
(D_4 u^{(c)})_1 &= \frac{u_3^{(c)} - 4u_2^{(c)} + 5u_1^{(c)} - 2u_0^{(c)}}{\Delta z^4}, \\
(D_4 u^{(c)})_{N-2} &= \frac{u_{N-4}^{(c)} - 4u_{N-3}^{(c)} + 5u_{N-2}^{(c)} - 2u_{N-1}^{(c)}}{\Delta z^4}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Для демпфирующей муфты дискретные операторы запишем следующим образом:

$$
\begin{aligned}
(D_1u^{(s)})_k &= \frac{u_{k+1}^{(s)} - u_{k-1}^{(s)}}{2\Delta z},\\
(D_2u^{(s)})_k &= \frac{u_{k-1}^{(s)} - 2u_k^{(s)} + u_{k+1}^{(s)}}{\Delta z^2},\\
(D_3u^{(s)})_k &= \frac{-u_{k+2}^{(s)} + 2u_{k+1}^{(s)} - 2u_{k-1}^{(s)} + u_{k-2}^{(s)}}{2\Delta z^3},\\
(D_4u^{(s)})_k &= \frac{u_{k-2}^{(s)} - 4u_{k-1}^{(s)} + 6u_k^{(s)} - 4u_{k+1}^{(s)} + u_{k+2}^{(s)}}{\Delta z^4},
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

где $0 \le k \le M-1$.

Для аппроксимации уравнения демпфирующей муфты в граничных узлах использовался метод фиктивных узлов. Используя граничные условия свободных концов (3.14) в фиктивных узлах $v_{-2}, v_{-1}, v_N, v_{N+1}$, получаем разностные формулы в граничных узлах:

$$
\begin{aligned}
u_{-2}^{(s)} &= u_2^{(s)} - 4u_1^{(s)} + 4u_0^{(s)}, \qquad u_{-1}^{(s)} = 2u_0^{(s)} - u_1^{(s)},\\
u_M^{(s)} &= 2u_{M-1}^{(s)} - u_{M-2}^{(s)}, \qquad u_{M+1}^{(s)} = u_{M-3}^{(s)} - 4u_{M-2}^{(s)} + 4u_{M-1}^{(s)}.
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

После дискретизации по пространственной переменной обезразмеренные уравнения движения принимают следующий вид (знак тильды опущен):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho AL^2}{t_0^2}\ddot{u}_j^{(c)} + \frac{EI}{L^2}(D_4u^{(c)})_j - \frac{\rho I}{t_0^2}(D_2\ddot{u}^{(c)})_j - \rho A\Omega^2L^2u_j^{(c)} + N_j(D_2u^{(c)})_j\\
&+\rho AgL(D_1u^{(c)})_j - \frac{3EA}{1-\nu}(D_1u^{(c)})_j^2(D_2u^{(c)})_j\\
&-hP_0\kappa L(1-\chi_j)\left[\bar{M}(D_1u^{(c)})_j - \frac{\kappa+1}{4}\bar{M}^2(D_1u^{(c)})_j^2 + \frac{\kappa+1}{12}\bar{M}^3(D_1u^{(c)})_j^3\right]\\
&+\chi_j\left[k_{\text{int}}L^2\left(u_j^{(c)} - u_{j-j_{\text{start}}}^{(s)}\right) + \frac{c_{\text{int}}L^2}{t_0}\left(\dot{u}_j^{(c)} - \dot{u}_{j-j_{\text{start}}}^{(s)}\right)\right] = 0,
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

$$\rho_s A_s \frac{L^2}{t_0^2}\ddot{u}_k^{(s)} - \frac{\rho_s I_s}{t_0^2}(D_2\ddot{u}^{(s)})_k - \rho_s A_s \Omega^2 L^2 u_k^{(s)} + \frac{E_s I_s}{2(\nu_s+1)L^2}(D_4 u^{(s)})_k$$
$$+\frac{\alpha L^2}{t_0}\dot{u}_k^{(s)} + \gamma_1 (D_2 u^{(s)})_k (D_1 u^{(s)})_k^4 + \gamma_2 (D_2 u^{(s)})_k (D_1 u^{(s)})_k^2 + \frac{\gamma_3}{L^2}(D_4 u^{(s)})_k (D_1 u^{(s)})_k^2$$
$$+\frac{\gamma_4}{L^2}(D_1 u^{(s)})_k (D_2 u^{(s)})_k (D_3 u^{(s)})_k + \frac{\gamma_5}{L^2}(D_2 u^{(s)})_k^3 \qquad (3.38)$$
$$-hP_0\kappa L\left(\bar{M}(D_1 u^{(s)})_k - \frac{\kappa+1}{4}\bar{M}^2 (D_1 u^{(s)})_k^2 + \frac{\kappa+1}{12}\bar{M}^3 (D_1 u^{(s)})_k^3\right)$$
$$-\left(k_{\text{int}} L^2 \left(u_{j_{\text{start}}+k}^{(c)} - u_k^{(s)}\right) + \frac{c_{\text{int}} L^2}{t_0}\left(\dot{u}_{j_{\text{start}}+k}^{(c)} - \dot{u}_k^{(s)}\right)\right) = 0.$$

Граничные условия для бурильной колонны, демпфирующей муфты, соответственно:

$$u_0^{(c)} = 0, \quad u_{N-1}^{(c)} = 0, \quad (D_2 u^{(c)})_0 = 0, \quad (D_2 u^{(c)})_{N-1} = 0,$$
$$(D_2 u^{(s)})_0 = 0, \quad (D_2 u^{(s)})_{K-1} = 0, \quad (D_3 u^{(s)})_0 = 0, \quad (D_3 u^{(s)})_{K-1} = 0. \qquad (3.39)$$

Начальные условия:

$$u_j^{(c)}(0) = 0, \quad \dot{u}_j^{(c)}(0) = \tilde{C}_1, \quad u_k^{(s)}(0) = 0, \quad \dot{u}_k^{(s)}(0) = \tilde{C}_1. \qquad (3.40)$$

Таким образом, получили систему ОДУ 2-го порядка относительно времени. Путем группировки вторых производных по времени в уравнениях (3.37)-(3.38) и переноса остальных членов в правую часть (в виде вектора $\bar{F}$), получаем единую трехдиагональную систему:

$$a\frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial t^2} - 2b\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + c\frac{\partial^2 v_{i+1}}{\partial t^2} = \mathrm{F}_i, \qquad (3.41)$$

где вектор силы $\bar{F}$ включает все нелинейные слагаемые, сформирован из оставшихся членов, определенных в уравнении (3.37) для $i < N$ и в уравнении (3.38) для $i \geq N$ (с учетом соответствия индексов для муфты).

Коэффициенты трехдиагональной матрицы инерции в уравнении (3.41) определяются следующим образом: для узлов бурильной колонны ($0 \leq i \leq N-1$)

$$v_i = u_i^{(c)}, \qquad a = c = \frac{\rho I}{\Delta z^2 t_0^2}, \qquad b = \frac{\rho A L^2}{2t_0^2} + \frac{\rho I}{\Delta z^2 t_0^2}; \qquad (3.42)$$

для узлов демпфирующей муфты $N \le i \le N + M - 1$

$$v_i = u_{i-N}^{(s)} \qquad a = c = \frac{\rho_s I_s}{\Delta z^2 t_0^2}, \qquad b = \frac{\rho_s A_s L^2}{2t_0^2} + \frac{\rho_s I_s}{\Delta z^2 t_0^2}. \tag{3.43}$$

Для эффективного численного решения полученной связанной системы были применены преобразования типа Гаусса, в результате которых уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = k_i \mathrm{F}_i, \tag{3.44}$$

где k_i – коэффициенты после преобразований Гаусса.

После дискретизации и применения гауссовой трансформации полученная связанная система обыкновенных дифференциальных уравнений была решена с использованием классического метода Рунге–Кутты четвёртого порядка. Программный код для численного решения реализован на языке C++ с использованием технологий параллельного программирования (OpenMP).

3.2.3 Анализ эффективности виброгашения

Численные расчеты были выполнены с использованием системных параметров, указанных в таблице 3.7.

Таблица 3.7 – Системные параметры

Параметр	Значение
1	2
Модуль Юнга бурильной колонны, E	2.1×10^{11} Па
Плотность материала бурильной колонны, ρ	7800 кг/м^3
Коэффициент Пуассона бурильной колонны, ν	0.28
Модуль Юнга муфты, E_s	1.2×10^{5} Па
Плотность материала муфты, ρ_s	1100 кг/м^3
Коэффициент Пуассона муфты, ν_s	0.5
Внутренний диаметр колонны, d_1	0.12 м
Внешний диаметр колонны/внутренний диаметр муфты, d_2	0.2 м
Внешний диаметр муфты, d_3	0.22 м
Угловая скорость вращения, Ω	0.5 рад/с
Давление невозмущенного потока газа, P_0	1.013×10^{3} Па
Число Маха, $\bar{M}$	2.5

Продолжение таблицы 3.7

1	2
Толщина стенки скважины, h	0.04 м
Показатель политропы, κ	1.4
Внутренний коэффициент демпфирования муфты, α	69 Н×с/м^2
Коэффициенты осевой сжимающей нагрузки, N_0, N_t	2200 Н
Временной шаг, Δt	5×10^{-4} с
Длина колонны, L	100 м
Коэффициент жесткости, k_{int}	10^4 Н/м^2
Коэффициент вязкости, c_{int}	100 Н×с/м^2
Начальная скорость C_1	0.01 м/с

На рисунке 3.15 представлены поперечные перемещения колонны в разных сечениях для случая отсутствия демпфирующих конструктивных элементов. Визуально видно преобладание первой моды колебаний: максимальные смещения в серединном поперечном сечении. Колебания не симметричные за счет включения собственного веса, в сечении 0.25L колебания значительно меньше, чем в нижней части бурильной колонны. На рисунке 3.16 изображены профили перемещений по длине колонны в разные моменты времени. На профиле видно, что включение веса дало выпучивание в нижней части колонны: максимальные перемещения в сечении 0.6L – 0.026 м, в 0.5L максимальные перемещения достигают 0.025 м. В момент времени 12.5 и 51.5 секунд наблюдаются высшие формы колебаний, перемещения равны нулю в нескольких местах.

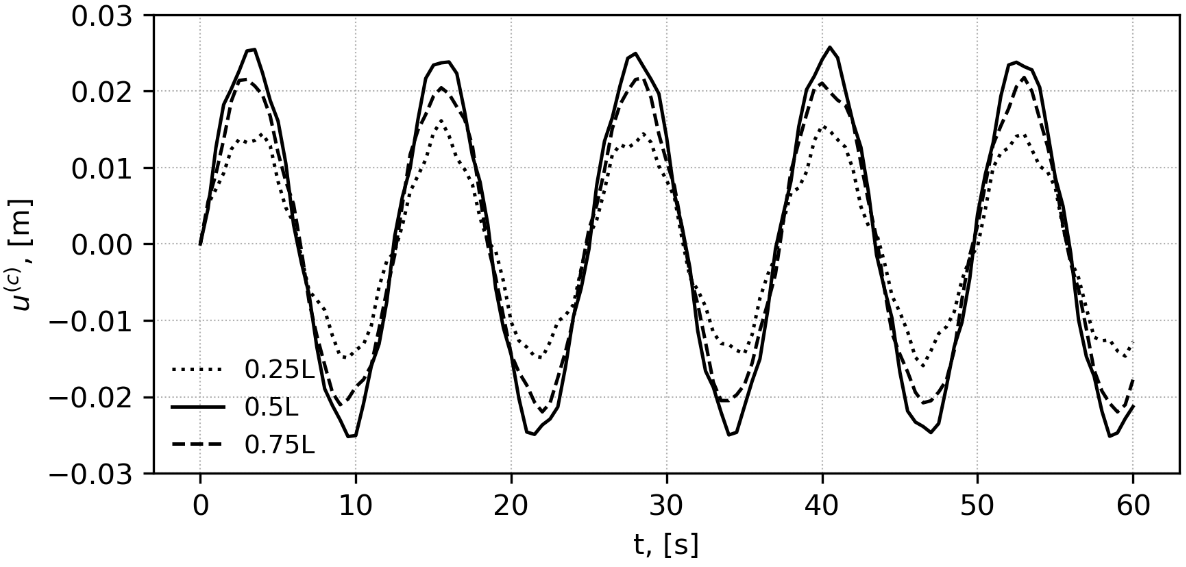


Рисунок 3.15 – Перемещения бурильной колонны в разных поперечных

сечениях

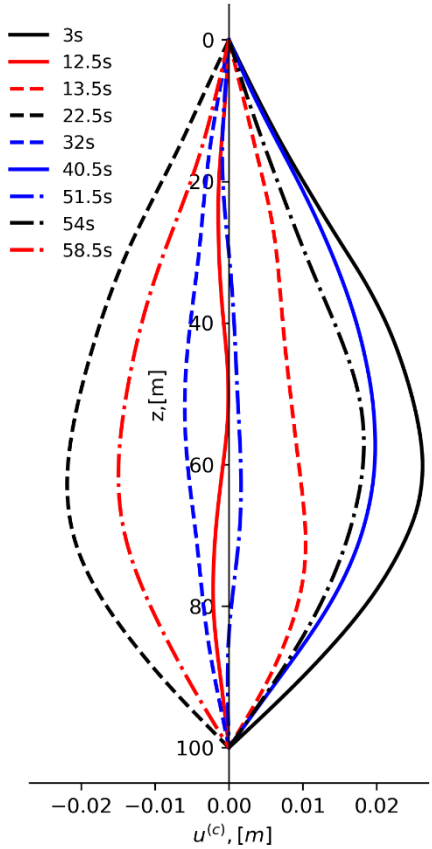


Рисунок 3.16 – Перемещения бурильной колонны по длине в разные моменты времени

Далее исследовались колебания с включением демпфирующей муфты в систему. Место установки было выбрано в серединном сечении; длина муфты 4 м, число узлов – пять. Сетка выбиралась равномерной, однако в будущем предполагается использование адаптивной сетки, сгущающейся к месту установки муфты. На рисунке 3.17 представлены перемещения бурильной колонны в серединном поперечном сечении с течением времени для случаев колонны без муфты и с муфтой. Наглядно видно, что первые 10 секунд колебания практически совпадают, но начиная с 15 секунды амплитуда перемещений колонны с муфтой начинает уменьшаться, колонна теряет энергию и раскачивается меньше. Это обусловлено передачей энергии от колонны к муфте: за счет вязко-упругих сил и относительного движения аккумулируются диссипативные свойства самой муфты и часть энергии, переданная от колонны к муфте, начинает рассеиваться, уменьшая тем самым поперечные колебания бурильной колонны со временем.

Это подтверждает энергетический график: для случая без муфты на рисунке 3.18, а) энергия практически не рассеивается (последний локальный максимум $E_{\max,\text{last}}$ составляет 96.3 % от начальной энергии E_0), в случае с установкой демпфирующей муфты энергия рассеивается от изначальной на

53.2 %, если считать по последнему локальному пику $\eta_{\text{loss}}^{\max}$ по формуле:

$$\eta_{\text{loss}}^{\max} = 1 - \frac{E_{\max,\text{last}}}{E_0}. \tag{3.45}$$

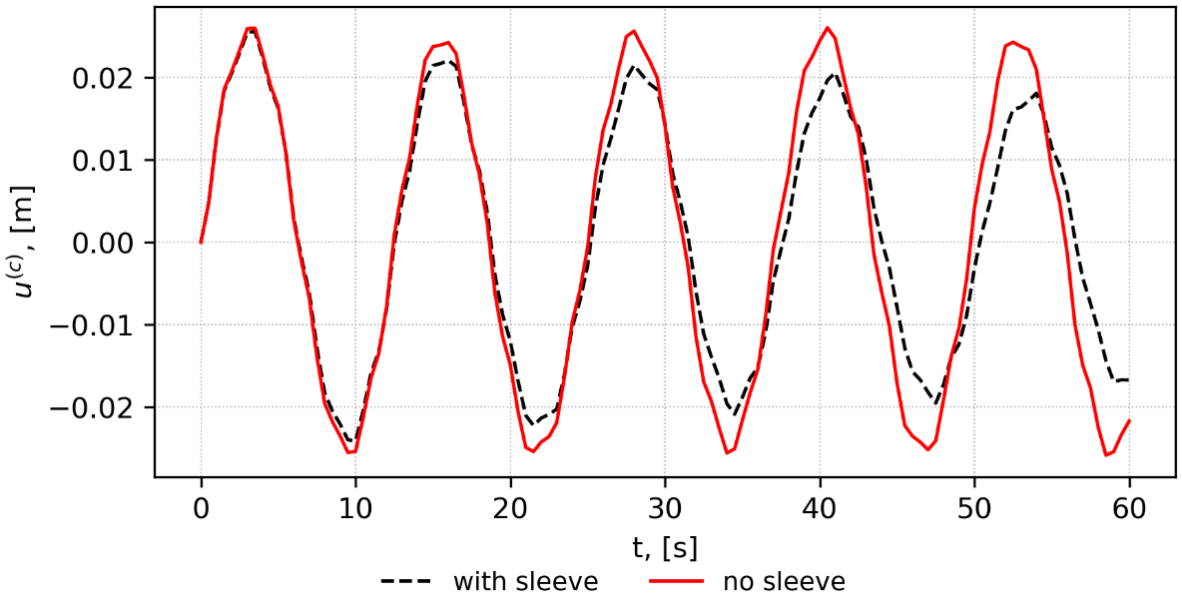


Рисунок 3.17 – Перемещения бурильной колонны с и без демпфирующей муфты, установленной в сечении $z = 0.5L$

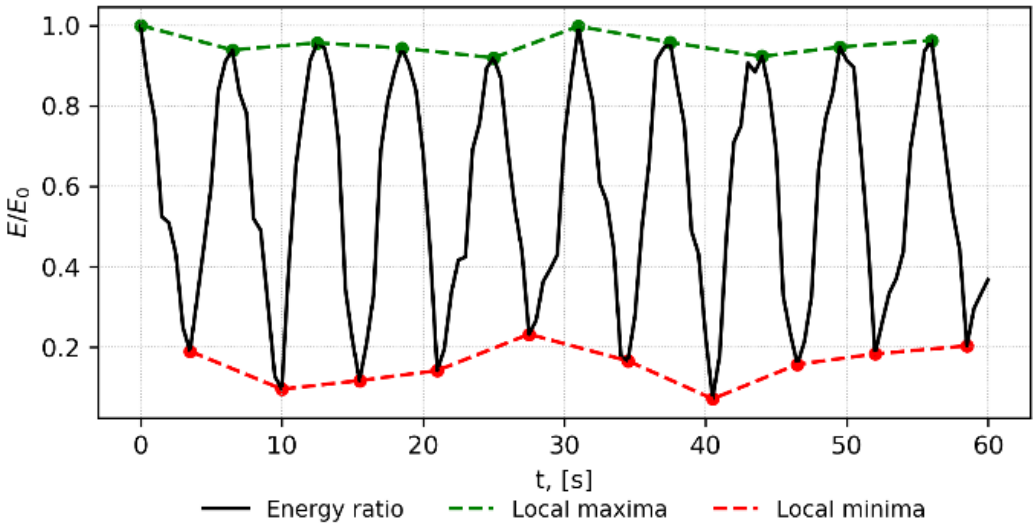
Полная механическая энергия консервативных сил системы считалась как сумма кинетических энергий муфты и колонны, потенциальных энергий муфты и колонны, потенциальной энергии взаимодействия муфты-колонны и влияния потенциала внешних сил от статической части продольной нагрузки и собственного веса:

$$\begin{aligned}
E &= T + U - P + T_s + U_s + U_{\text{int}}, \\
T &= \frac{\rho}{2}\int_0^L \left[A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + I\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t}\right)^2 + A\Omega^2 u^2 \right] dz, \\
U &= \int_0^L \left[\frac{EA}{4(1-\upsilon)}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^4 + \frac{EI}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)^2 \right] dz, \\
P &= -\frac{1}{2}\int_0^L \left[N_{ax} - \rho A g (L - z) \right]\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dz, \\
T_s &= \frac{\rho_s}{2}\int_{z_{start}}^{z_{end}} \left[A_s\left(\frac{\partial u_s}{\partial t}\right)^2 + I_s\left(\frac{\partial^2 u_s}{\partial z \partial t}\right)^2 + A_s\Omega^2 u_s^2 \right] dz,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

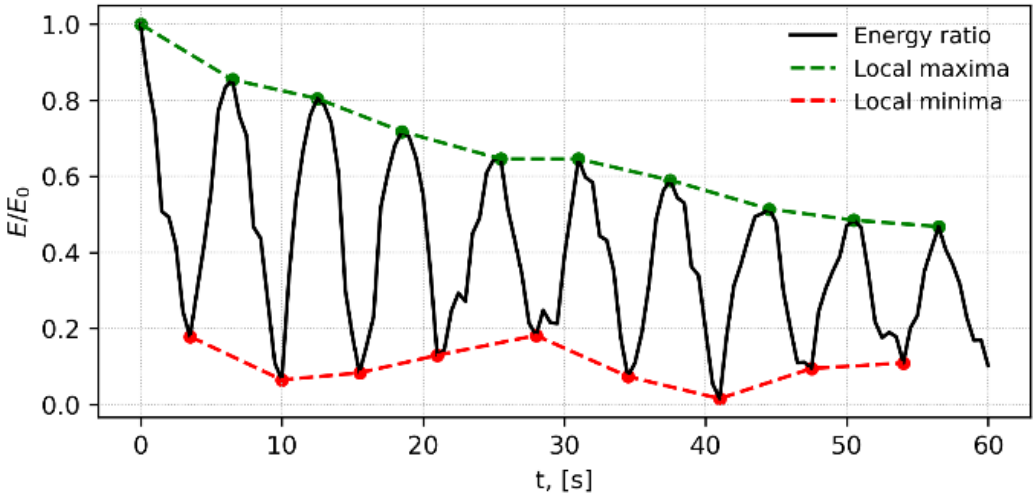
$$U_s = \frac{G_s}{8}\int_{z_{start}}^{z_{end}} \left[\begin{array}{l} 2A_s\left(\frac{\partial u_s}{\partial z}\right)^4 + 4I_s\left(\frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2}\right)^2 - A_s\left(\frac{\partial u_s}{\partial z}\right)^6 \\ -6I_s\left(\frac{\partial u_s}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2}\right)^2 \end{array} \right] dz,$$

$$U_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int_{z_{start}}^{z_{end}} \left[k_{\text{int}}(u-u_s)^2\right] dz.$$

Сам график носит нелинейный колебательный характер, что может быть обусловлено наличием переменной во времени составляющей продольной силы и действием газа. На рисунке 3.18, б) отчетливо видно диссипативные свойства муфты.



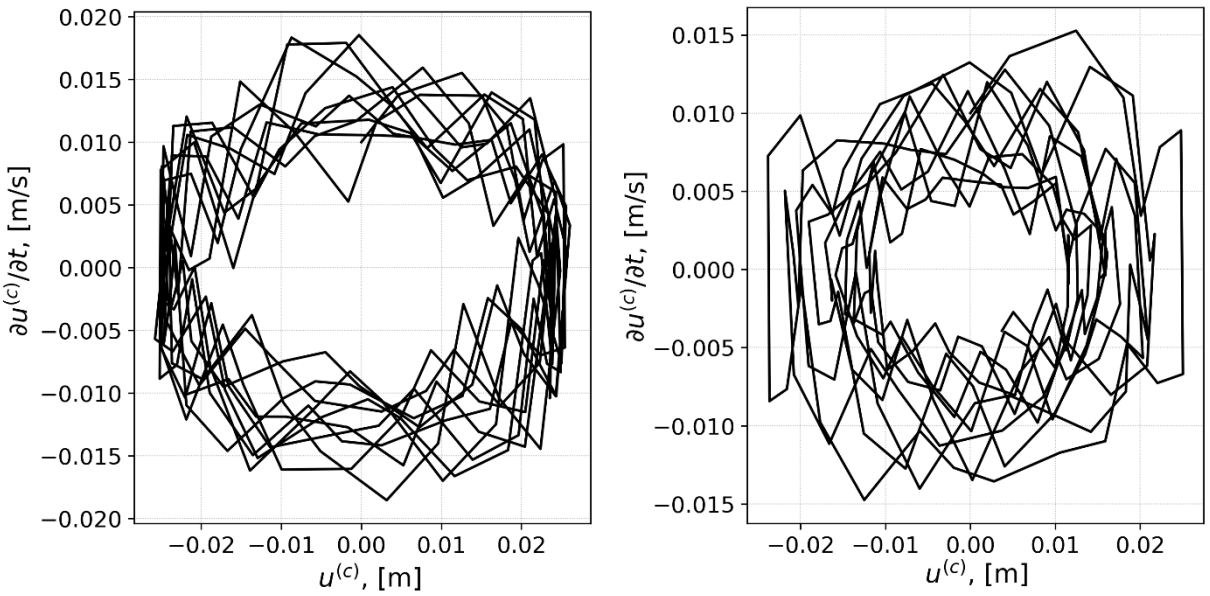
a)



b)

Рисунок 3.18 – Изменение нормальной механической энергии со временем для случаев a) без муфты b) с демпфирующей муфтой в $z = 0.5L$

На рисунке 3.19 представлены фазовые портреты колебательного процесса в сечении z=0.5L при отсутствии (a) и наличии (b) демпфирующей муфты. В случае без демпфирования фазовые траектории образуют замкнутое множество, что свидетельствует о слабом рассеянии энергии. При установке демпфирующей муфты наблюдается заметное сжатие фазового портрета со временем к началу координат и уменьшение разброса траектории, что указывает на эффективное подавление колебаний и повышение устойчивости динамического режима. Фазовые траектории не представляют собой идеально скручивающуюся спираль ввиду внешнего возбуждения и нелинейности системы, резкие переходы обусловлены временным промежутком записи данных.



a) b)

Рисунок 3.19 – Фазовые портреты без и с муфтой, установленные в $z = 0.5L$

Были построены перемещения самой муфты и колонны в сечении 0.5L (рисунок 3.20). Визуально перемещения сливаются в одну линию, кажется, что они совпадают. Однако на графике разности амплитуд колонны и муфты со временем, изображенных на рисунке 3.21, видно, что относительное перемещение есть, порядка 10^{-4} м, в то время как сами перемещения порядка 10^{-2} м, что обуславливает отсутствие видимых изменений на рисунке 3.20. При уменьшении колебаний колонны и муфты, соответственно, уменьшаются амплитуды их относительного перемещения.

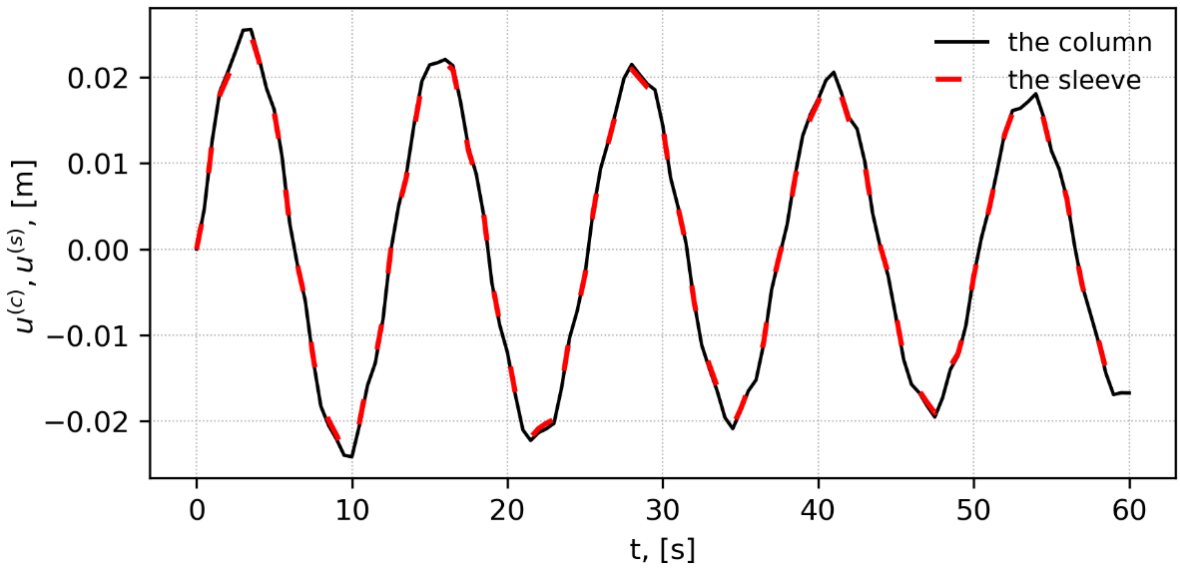


Рисунок 3.20 – Перемещения бурильной колонны и демпфирующей муфты, установленной в сечении $z = 0.5L$

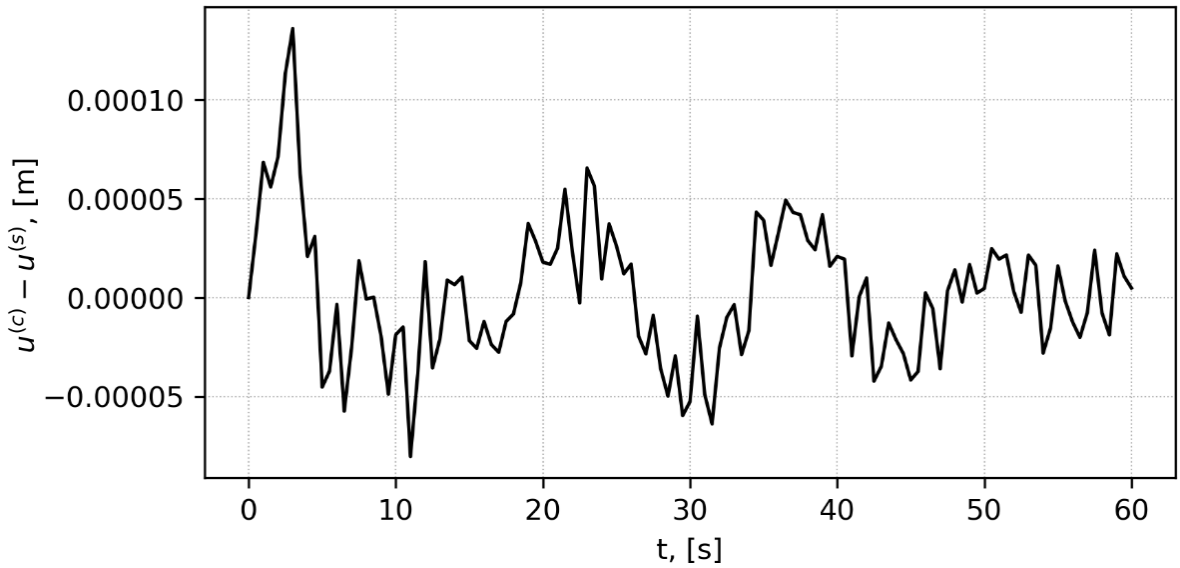


Рисунок 3.21 – Относительные перемещения системы «колонна-муфта» $u - u_s$ в сечении $z = 0.5L$

Далее были проанализированы три сценария установки муфты для подтверждения гипотезы о том, что оптимальное место для установки муфты является серединным сечением. Рассмотрены следующие сценарии установки муфты: в сечениях 0.25L, 0.5L и 0.75L. На рисунке 3.22 представлены перемещения в серединном поперечном сечении на промежутке 60 секунд. Поскольку первые секунды перемещения практически совпадают, графики показаны, начиная с 20й секунды. Видно, что демпфирование есть даже при установке муфты в сечении 0.25L, однако уменьшение амплитуды существенно меньше, чем при установке в сечениях 0.75L и 0.5L. Разница в перемещениях для

случаев 0.5L и 0.75L визуально небольшая, установка в сечении 0.5L обеспечивает наилучшее рассеяние энергии. Это подтверждается энергетическим графиком на рисунке 3.23; количественно значения $\eta_{\text{loss}}^{\max}$ представлены в таблице 3.8. При установке муфты в сечении 0.25L за 60 секунд энергия рассеивается на 28.7%, при установке в сечении 0.5L, 0.75L рассеяние составляет 53.2% и 45.6% соответственно, почти в два раза эффективнее, чем при установке в верхней части колонны.

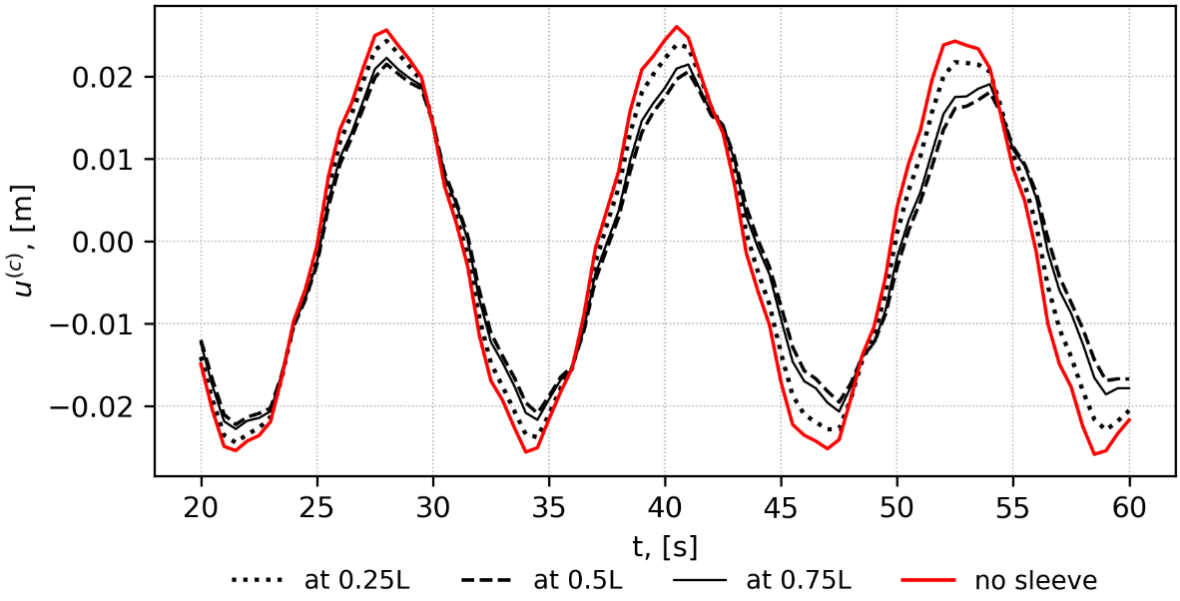


Рисунок 3.22 – Перемещения бурильной колонны в сечении $z = 0.5L$ для случаев разной локации демпфирующей муфты

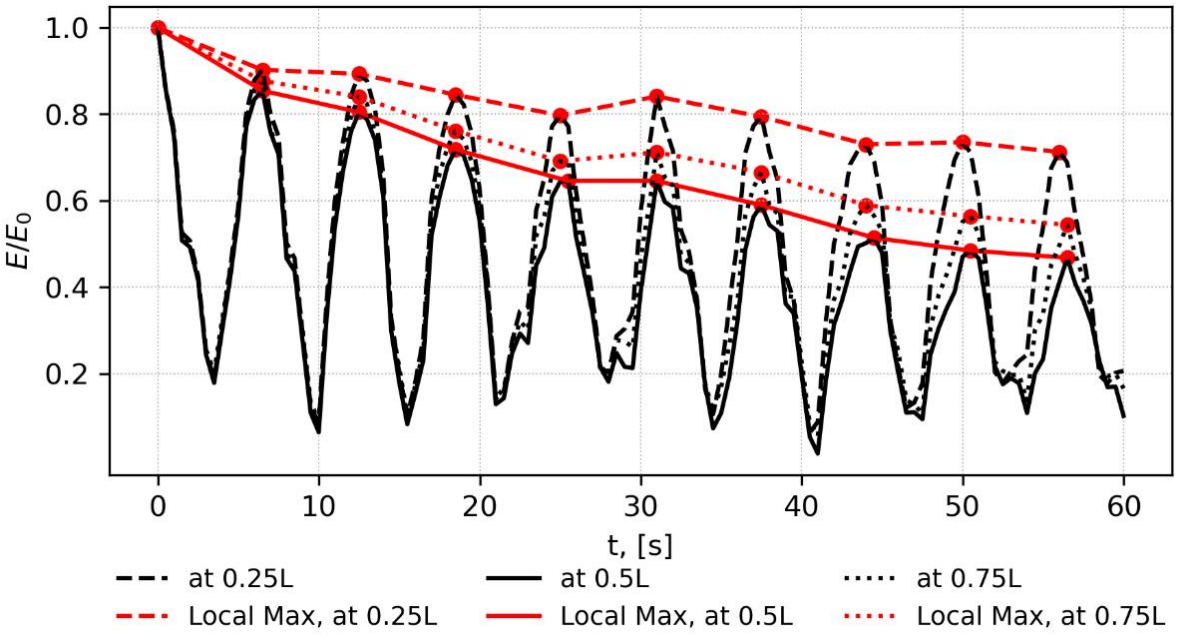


Рисунок 3.23 – Изменение нормальной механической энергии со временем в зависимости от места установки муфты

Таблица 3.8 – Количественные метрики оценки демпфирования муфтой в зависимости от места установки муфты

Расположение муфты	Нет муфты	В сечении $0.25L$	В сечении $0.5L$	В сечении $0.75L$
$u_{\text{RMS}}^{\max}$, [м]	0.01816	0.01711	0.01515	0.015
ζ_u	0	0.057	0.166	0.138
$\eta_{\text{loss}}^{\max}$	0.037	0.287	0.532	0.456

Для оценки эффективности демпфирования по длине колонны в зависимости от установки муфты был построен профиль среднеквадратичных перемещений колонны на промежутке времени 60 секунд. Среднеквадратичные перемещения вычислялись по формуле:

$$u_{\text{RMS}}(z) = \sqrt{\frac{1}{t_1 - t_2}\int_{t_1}^{t_2} u^2\left(z,t\right)dt}. \tag{3.47}$$

На рисунке 3.24 визуально видно, что наличие муфты рассеивает энергию, а также перемещения уменьшаются по всей длине колонны для всех сценариев установки муфты. Установлено, что установка демпфирующей муфты в нижней части колонны обеспечивает наиболее эффективное рассеяние. Максимальное рассеяние достигается при установке в серединном поперечном сечении.

В таблице 3.8 представлены максимальные амплитуды перемещений по профилю для каждого случая и вычислено процентное соотношение от максимальных перемещений колонны без муфты ζ_u , определяемое формулой:

$$\zeta_u = 1 - \frac{u_{\text{RMS}}^{\max}}{u_{\text{RMS}}^{\max,0}}, \tag{3.48}$$

чтобы количественно оценить, на сколько процентов уменьшилась амплитуда колебаний.

Так, при установке в сечении 0.25L колебания были снижены на 6 %, при 0.75L на 14 %, при 0.5L на 17 %. Таким образом, всесторонний анализ перемещений и распределения энергии подтвердил, что наиболее эффективным местом установки муфты является серединное сечение, поэтому далее вычислительные эксперименты проводились для данного случая.

Далее было проанализировано влияние физико-механических свойств самой муфты на динамику системы. Стоит отметить допущение о независимости параметров длины/толщины муфты на коэффициент внутреннего демпфирования. На практике такие характеристики, как длина и толщина муфты существенно влияют на собственную частоту и коэффициент внутреннего

демпфирования, однако расчет собственных частот муфты в связанной системе является не тривиальной задачей и в рамках данного исследования не рассматривается. При анализе данных параметров стоит учитывать, что показатели эффективности рассеяния могут быть занижены.

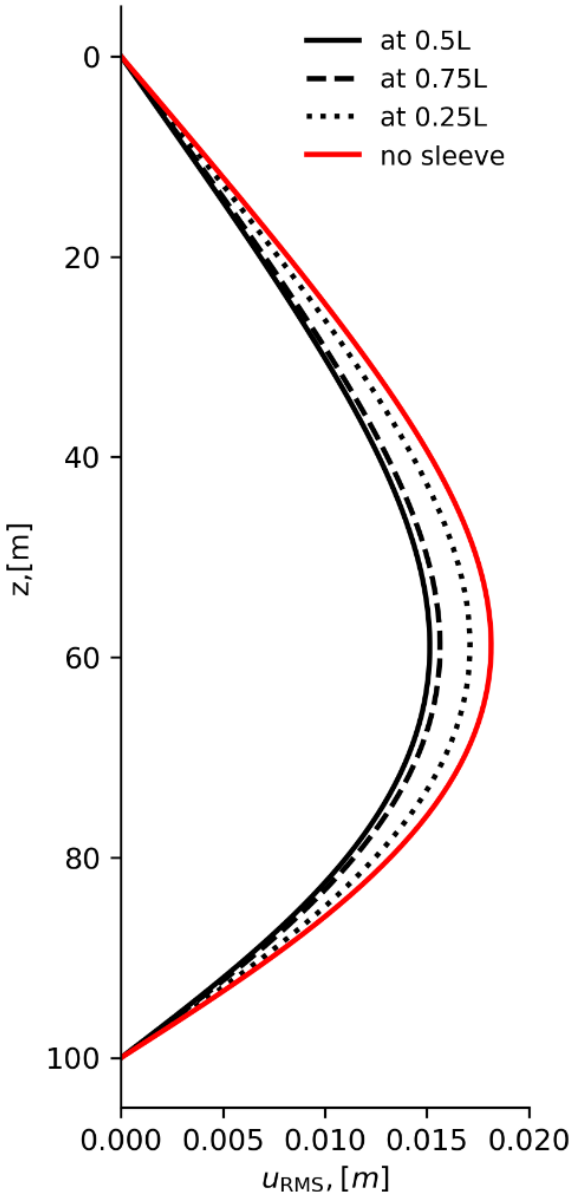


Рисунок 3.24 – Профиль среднеквадратичных перемещений бурильной колонны в зависимости от места установки муфты

Было проанализировано влияние внешнего диаметра муфты на динамику системы. Брались случаи 22 см и 25 см. На рисунке 3.25 представлены поперечные перемещения муфты в серединном сечении на промежутке 60 секунд. Визуально видно значительные количественные изменения: при увеличении толщины муфты эффективность демпфирования повышается, колебания значительно уменьшаются. На энергетическом графике 3.26 видно,

что локальные максимумы также значительно уменьшились и, начиная с 30 секунд не превышают 30% от начальной энергии. Среднеквадратичные перемещения по длине колонны также это подтверждают на рисунке 3.27.

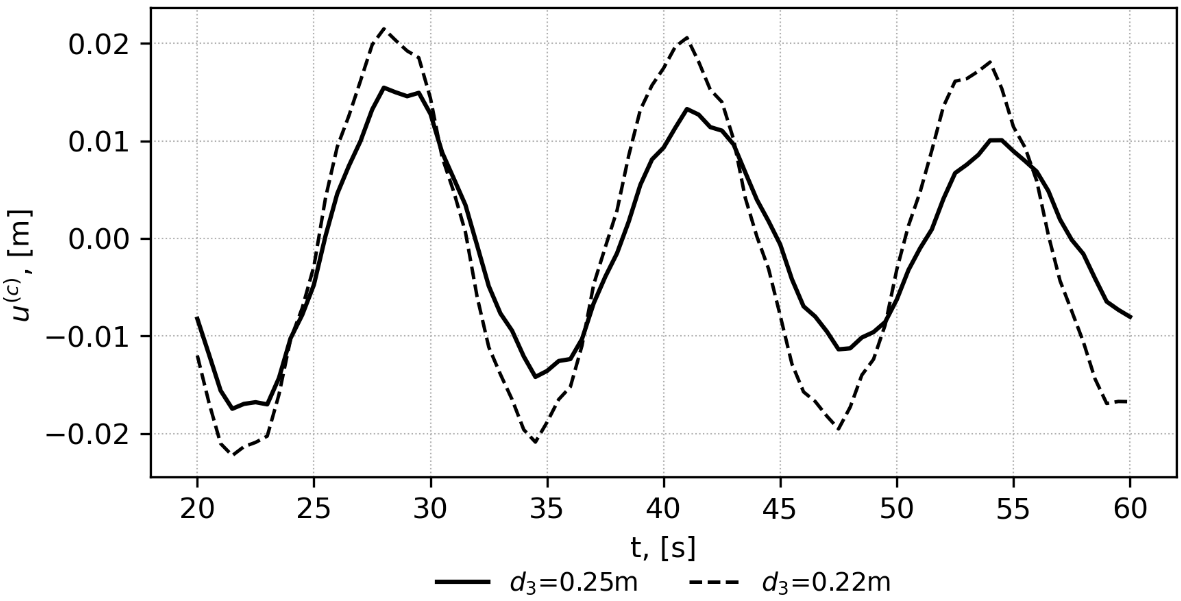


Рисунок 3.25 – Перемещения бурильной колонны в сечении $z = 0.5L$ для разных диаметров демпфирующей муфты

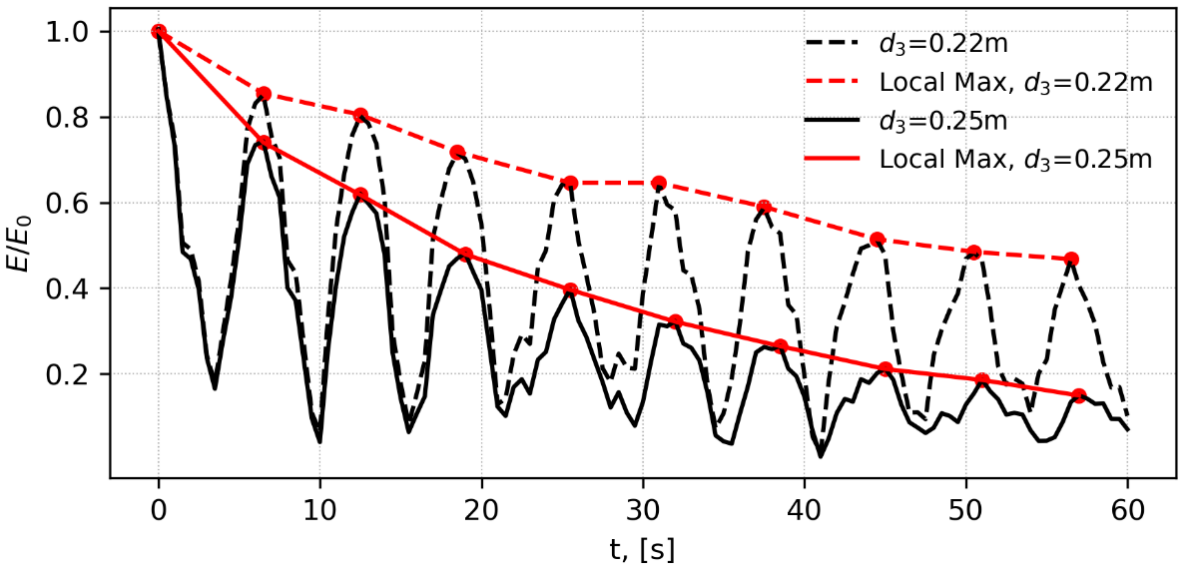


Рисунок 3.26 – Изменение нормальной механической энергии со временем для разных внешних диаметров демпфирующей муфты

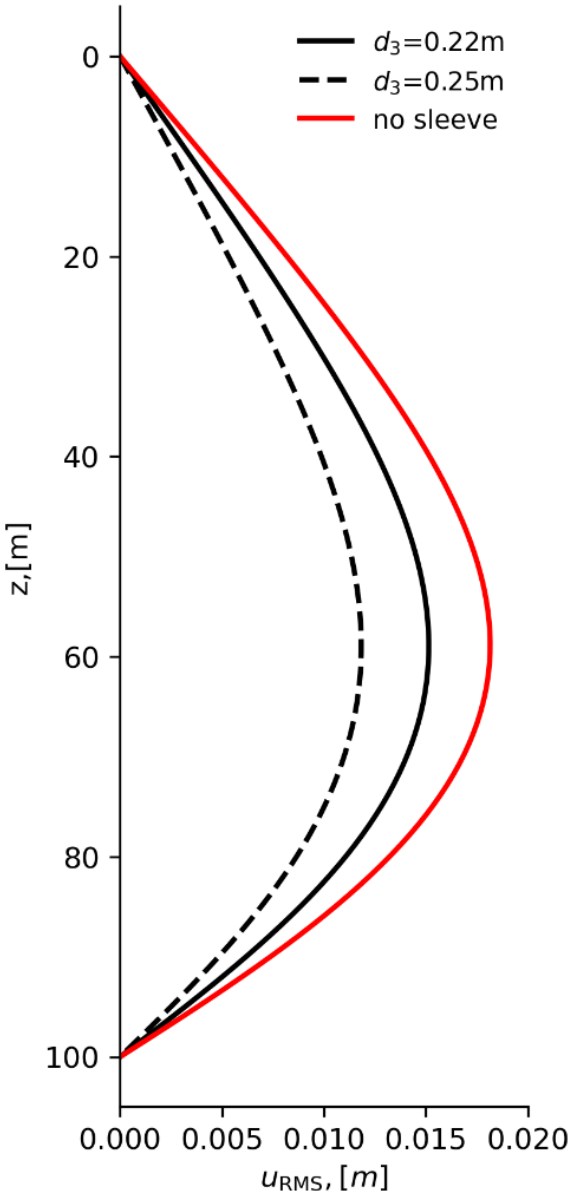


Рисунок 3.27 – Профиль среднеквадратичных перемещений бурильной колонны в зависимости от внешнего диаметра демпфирующей муфты

Количественная оценка приведена в таблице 3.9. При использовании большего диаметра на 3 см (25 см) максимальные среднеквадратичные перемещения уменьшились в два раза по сравнению с использованием муфты диаметром 22 см: в случае с 22 см колебания уменьшились на 16.6 %, в случае с 25 см на 34.8 %, энергии рассеялось 53.2 % за 60 секунд в случае толщины 22 см и 85 % при использовании утолщенной муфты. Это может быть обусловлено увеличением погонной массы муфты, которая поглощает больше энергии и обладает большими демпфирующими свойствами.

Таблица 3.9 – Количественные метрики оценки демпфирования муфтой в зависимости от внешнего диаметра муфты

Внешний диаметр	Нет муфты	$d_3 = 0.22$ м	$d_3 = 0.25$ м
$u_{\text{RMS}}^{\max}$, [м]	0.018	0.015	0.012
ζ_u	0	0.166	0.348
$\eta_{\text{loss}}^{\max}$	0.037	0.532	0.851

Установлена прямая зависимость эффективности муфты от длины самой муфты, что может быть также обусловлено увеличением погонной массы демпфирующего элемента. На рисунках 3.8-3.30 представлены поперечные перемещения колонны в серединном сечении, энергетические графики и профиль среднеквадратичных перемещений соответственно для разных длин муфты. Отметим, что за счет использования равномерной сетки меньшая длина муфты рассматривалась при большем числе точек разбиения колонны (N=200 для $L_s = 2$ м, N=100 для других случаев), а также, учитывая второй порядок уравнений по пространству, минимально требовалось пять точек разбиения для муфты. Из графиков можно сделать вывод, что при использовании муфты большей длины энергия рассеивается интенсивнее, колебания затухают быстрее.

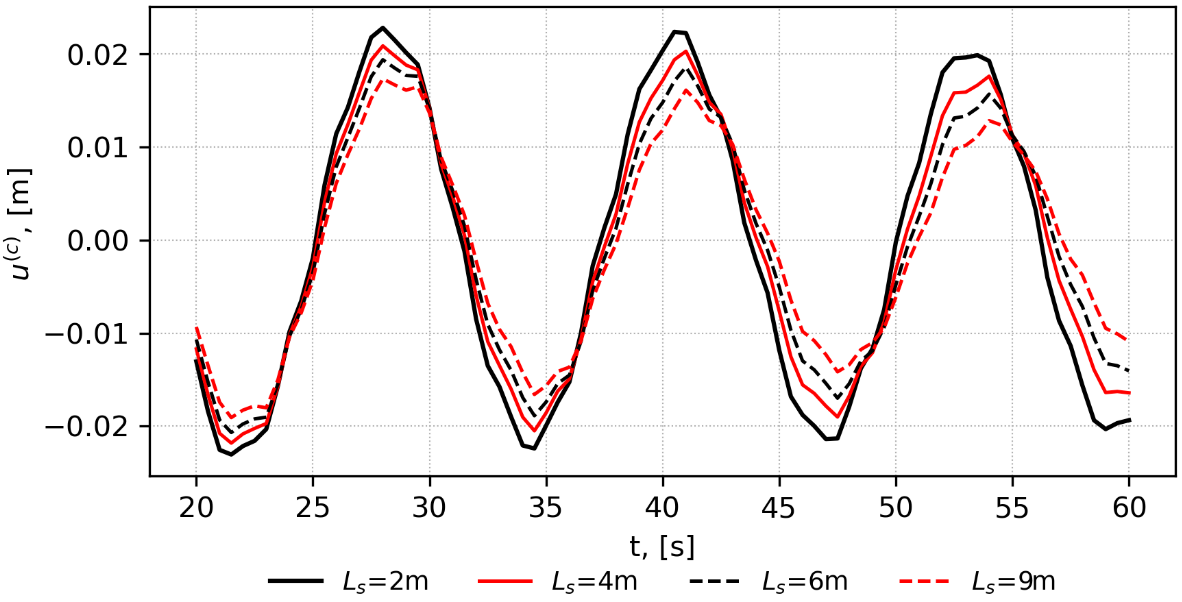


Рисунок 3.28 – Перемещения бурильной колонны в сечении $z = 0.5L$ в зависимости от длины демпфирующей муфты

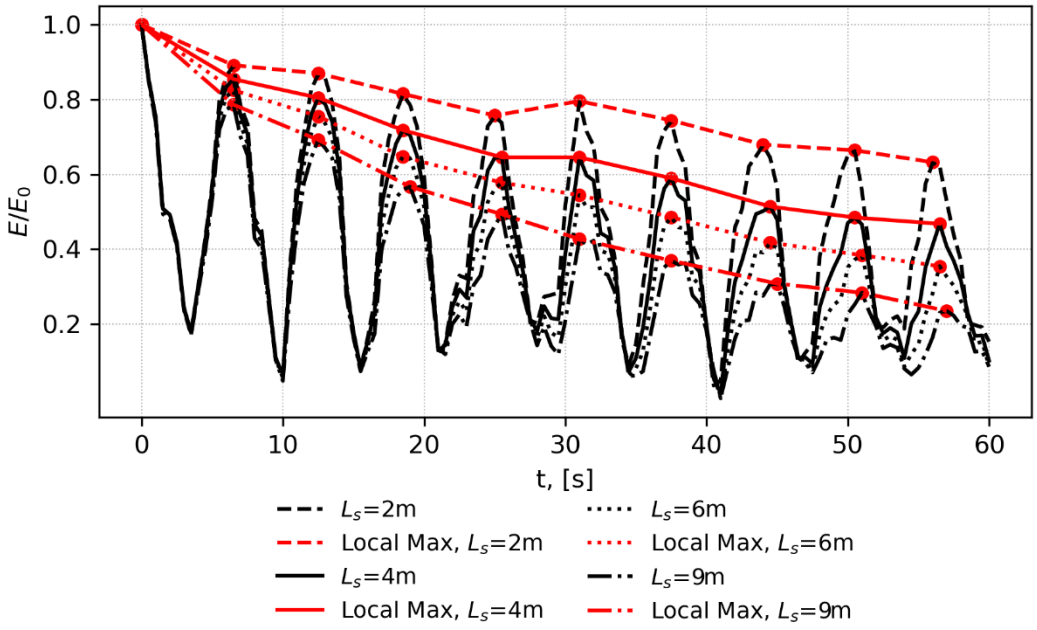


Рисунок 3.29 – Изменение нормальной механической энергии со временем в зависимости от длины демпфирующей муфты

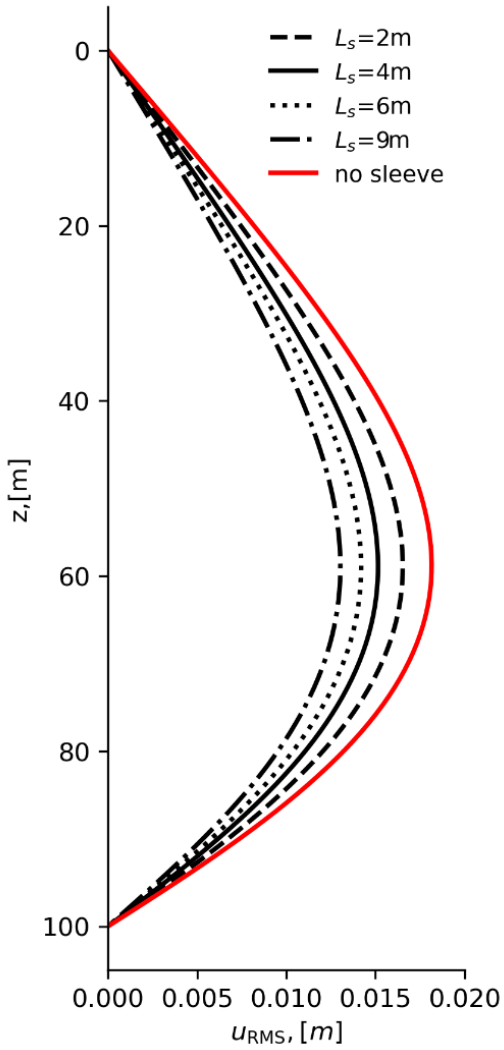


Рисунок 3.30 – Профиль среднеквадратичных перемещений бурильной колонны в зависимости от длины демпфирующей муфты

Количественная оценка эффективности демпфирования представлена в таблице 3.10. Так, при использовании муфты длиной 2.5 м муфта рассеивает 37 % энергии за 60 секунд и уменьшает колебания на 9 %, при использовании муфты длиной 4 м рассеивается 53 % энергии и колебания уменьшаются на 17 %, 6 м рассеивают 65 % и на 22 % уменьшают колебания, 9 м – 77 % и 28 % соответственно.

Таблица 3.10 – Количественные метрики оценки демпфирования муфтой в зависимости от длины муфты

Длина муфты	Без муфты	$L_s = 2$ м, dz=0.5 м	$L_s = 4$ м, dz=1 м	$L_s = 6$ м, dz=1 м	$L_s = 9$ м, dz=1 м
$u_{\text{RMS}}^{\max}$, [м]	0.018	0.017	0.015	0.014	0.013
ζ_u	0	0.089	0.166	0.218	0.282
$\eta_{\text{loss}}^{\max}$	0.037	0.368	0.532	0.645	0.765

Проанализируем чувствительность муфты к коэффициенту демпфирования α, отвечающему за динамические характеристики муфты. Принято допущение про независимость параметров толщины/длины от коэффициента демпфирования. В будущем планируется более точный учет эффективности за счет анализа собственных частот муфты. Аналогично наблюдается прямая зависимость эффективности демпфирования за счет увеличения коэффициента внутреннего демпфирования. На рисунках 3.31-3.33 представлены графики поперечных перемещений в серединном сечении, энергетический график и профиль среднеквадратичных перемещений по длине колонны на промежутке 60 секунд для различных случаев коэффициента демпфирования, где визуально видно, что с увеличением коэффициента демпфирования поперечные колебания затухают интенсивнее, локальные максимумы в энергетическом графики меньше. В таблице 3.11 представлена количественная оценка: при использовании $\alpha = 23$ Нс/м^2 колебания уменьшают на 6 % и рассеивается 28 % энергии, при $\alpha = 69$ Нс/м^2 (базовый случай в нашем исследовании) на 17 % и 53 %, при $\alpha = 115$ Нс/м^2 на 25 % и 70 % соответственно.

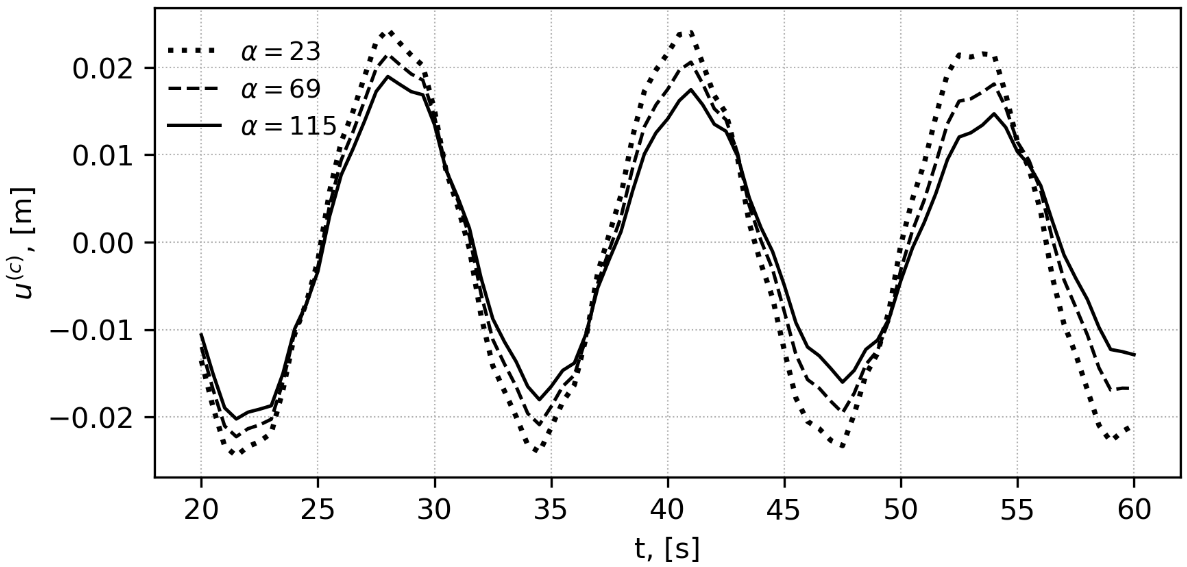


Рисунок 3.31 – Перемещения бурильной колонны в сечении $z = 0.5L$ в зависимости от коэффициента внутреннего демпфирования

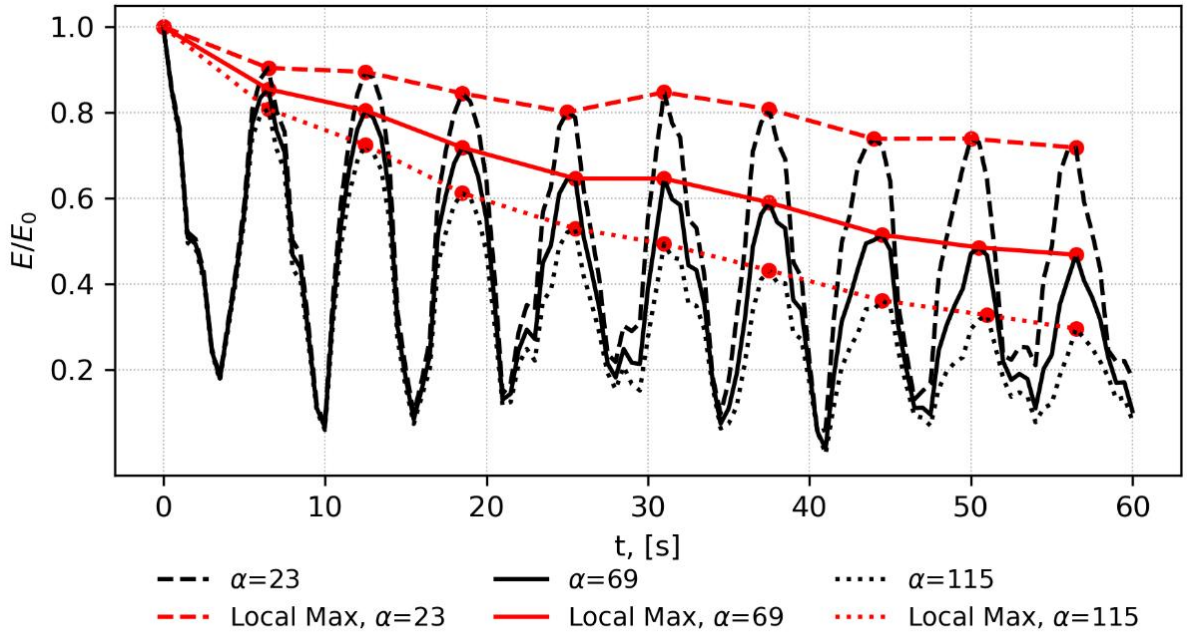


Рисунок 3.32 – Изменение нормальной механической энергии со временем в зависимости от внутреннего коэффициента демпфирования

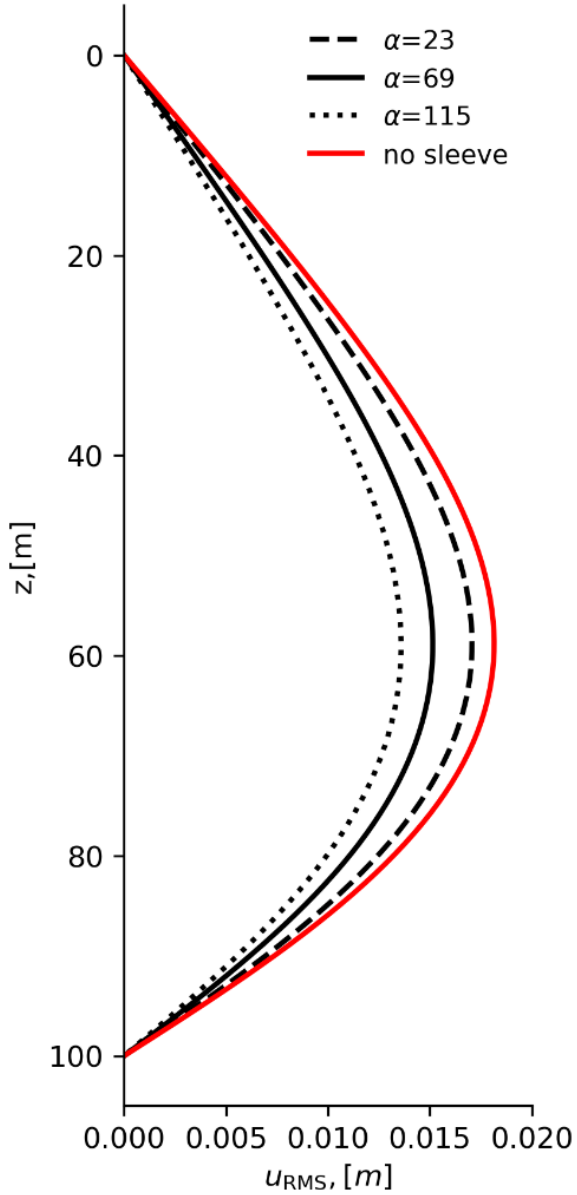


Рисунок 3.33 – Профиль среднеквадратичных перемещений бурильной колонны в зависимости от коэффициента внутреннего демпфирования

Таблица 3.11 – Количественные метрики оценки демпфирования муфтой в зависимости от коэффициента внутреннего демпфирования

$\alpha, [Н\times с/м^2]$	No sleeve	$\alpha = 23$	$\alpha = 69$	$\alpha = 115$
$u_{RMS}^{max}, [м]$	0.018	0.017	0.015	0.0135
ζ_u	0	0.059	0.166	0.251
η_{loss}^{max}	0.037	0.282	0.532	0.704

Таким образом, численный анализ показывает сильную зависимость эффективности демпфирования от физико-механических характеристик демпфирующей муфты и места ее установки. Результаты показывают

выраженную зависимость затухания вибрации от толщины, длины и коэффициента демпфирования муфты, что указывает на существование диапазонов параметров, обеспечивающих оптимальное рассеивание энергии. Рассмотрение муфты как непрерывного тела со своей собственной инерцией позволяет учесть дополнительные механизмы перераспределения энергии внутри связанной системы, которые невозможно выявить в упрощенных моделях с сосредоточенными параметрами.

В параграфе 3.2 разработан и численно реализован подход к анализу виброзащиты бурильной колонны, основанный на учёте собственной инерции демпфирующей муфты как сплошного тела, взаимодействующего с колонной через вязко-упругие силы, аккумулируемые относительным движением. Включение муфты в динамическую цепь системы позволило выявить дополнительные механизмы перераспределения и диссипации энергии, не учитываемые в упрощённых моделях. Разработанная модель бурильной колонны учитывала геометрическую нелинейность системы, включая вращение колонны, продольную сжимающую нагрузку и влияние газового потока. Муфта моделировалась с учетом геометрической и физической нелинейности. Математическая постановка основана на нелинейной теории упругости В. В. Новожилова, а для описания физически нелинейных свойств материала используется потенциал Трелоара. Такой подход обеспечивает корректное воспроизведение сложного напряженно-деформированного состояния и динамического поведения системы в широком диапазоне эксплуатационных параметров. Разработана дискретная модель связанных колебаний МСП и реализован оптимизированный численный алгоритм на C++ с использованием технологий параллельного программирования. Алгоритм позволяет эффективно проводить численные эксперименты для произвольной размерности колонны и муфты, а также гибко настраивать параметры модели.

Проведённые расчёты продемонстрировали существенную зависимость эффективности демпфирования от геометрических и физико-механических параметров муфты, а также от её положения вдоль колонны. Установлена высокая чувствительность амплитуд колебаний к толщине, длине и коэффициенту демпфирования муфты, что указывает на необходимость целенаправленной параметрической оптимизации при проектировании виброзащитных систем.

Данный подход открывает класс новых, ранее неизученных задач в области виброзащиты стрежневых элементов и моделированию сложных связанных нелинейных эффектов. Полученные результаты расширяют представления о динамике стержневых систем с локальными инерционными элементами и создают основу для дальнейшего развития моделей. В дальнейшем работа видится в более точном анализе влияния параметров за счет изучения спектра собственных частот муфты, использования адаптивной сетки, увеличения числа муфт в системе, рассмотрения пространственных и связанных колебаний.

Выводы по разделу 3

В данном разделе на основе нелинейной теории упругости В. В. Новожилова и упругого потенциала Трелоара разработаны новые обобщенные нелинейные модели динамики бурильных колонн, оснащенных элементами виброзащиты (опорными стабилизаторами и демпфирующими муфтами), в условиях сложного внешнего нагружения (крутящего момента, продольной сжимающей нагрузки, вращения, собственного веса) и воздействия газового потока; на основе МСП проведено комплексное исследование данных моделей. Результаты численного моделирования показали, что интеграция опорных стабилизаторов, особенно при их размещении в серединном сечении колонны, обеспечивает значительное снижение амплитуды колебаний и позволяет сохранять динамическую устойчивость системы даже при десятикратном увеличении продольных сжимающих нагрузок. Установлено, что учет собственного веса колонны приводит к существенному росту интенсивности вибраций с локализацией прогиба в нижней части и возникновению хаотических режимов движения, что подтверждает необходимость точной настройки параметров стабилизации. Особую научную значимость представляет разработанный подход к анализу демпфирующих муфт как инерционных сплошных тел с физической нелинейностью на основе потенциала Трелоара, который позволил выявить дополнительные механизмы диссипации энергии через относительное движение элементов и доказать высокую чувствительность системы к геометрическим параметрам муфты. Программная реализация предложенных моделей с использованием параллельных технологий на языке C++ обеспечила высокую вычислительную эффективность, создав надежную базу для дальнейшего изучения пространственных связанных колебаний, неоднородных структур и стохастических явлений в сложных динамических системах.

4 АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН И ПЛАСТИН НА НЕЛИНЕЙНОМ ОСНОВАНИИ

Исследование динамики бурильных колонн, проводимое в предыдущих разделах, показывает, что эффективность виброзащиты во многом определяется характеристиками демпфирующих узлов, в частности резинокордных демпфирующих муфт. С точки зрения механики деформируемого твердого тела, такие элементы представляют собой многослойные высококонтрастные структуры, в которых жесткие слои корда чередуются с высокоэластичными слоями резинового заполнителя. Традиционные методы расчета подобных узлов часто опираются на упрощенные одномерные модели, которые не учитывают сложную структуру распределения напряжений в зонах контакта. В таких высококонтрастных средах классический принцип Сен-Венана вырождается [80]: краевые эффекты проникают вглубь демпфирующего элемента на расстояния, соизмеримые с его длиной, что может приводить к преждевременному разрушению резинокордного слоя. Целью данного раздела является разработка строгой математической базы для уточненного моделирования напряженно-деформируемого состояния (НДС) демпфирующих элементов. Рассматривая демпфирующую муфту как многослойную высококонтрастную пластину, решается задача антиплоского сдвига для уточнения условий затухания. Предложенная методика вывода условий затухания обобщена на случай нелинейного основания Винклера, что может обуславливать вязко-упругое сжатие муфты или взаимодействие с промывочной жидкостью. Это позволит уточнить природу колебаний и обосновать выбор геометрических параметров виброзащитных устройств, исследованных в прикладной части работы.

4.1 Уточнение принципа Сен-Венана для упругих высококонтрастных слоистых пластин

Многослойные тонкостенные структуры с высоким контрастом толщины, жесткости или плотности слоев представляют большой научный интерес благодаря широкому спектру практических применений, см. [76, 77]. Большинство публикаций, посвященных изучению высококонтрастных ламинатов, в основном сосредоточены на уравнениях движения, тогда как для структуры конечного размера анализ граничных условий становится столь же важным. Условия затухания лежат в основе формулировки краевой задачи для высококонтрастной полубесконечной трехслойной упругой полосы, когда двумерное уравнение сводится к решению одномерного осредненного. Методика сведения многомерных задач теории упругости к низкоразмерным моделям опирается на асимптотическое разделение решения на две составляющие: внутреннее (осредненное) решение, доминирующее вдали от краев, и локальное решение типа пограничного слоя, сосредоточенное в узкой

окрестности торца. В данной задаче принимаем структуру одномерных уравнений для внутренней области известной, фокус идет на формулировке асимптотических условий затухания. Эти условия лежат в основе корректной постановки краевой задачи для высококонтрастной полубесконечной трехслойной полосы, позволяя связать произвольную торцевую нагрузку с граничными значениями для осредненных характеристик внутренней задачи.

В данном параграфе рассматривается трехслойная упругая полубесконечная полоса, подверженная антиплоскому сдвигу. Отношение жесткостей принимается за малый параметр. Исследуются так называемые условия затухания, обобщающие принцип Сен-Венана. С использованием асимптотической послойной процедуры получена асимптотическая поправка первого порядка к дополнительному условию, исключающему существование медленно затухающих пограничных слоев. Полученная уточненная формула содержит функции координаты по толщине, выраженные через бесконечные ряды; их сходимость анализируется численно для различных значений отношения толщин. Также приведен пример устранимой особенности в общем решении.

4.1.1 Постановка антиплоской задачи и условия затухания

Рассмотрим антиплоский сдвиг трехслойной полубесконечной пластины, состоящей из изотропных слоев: относительно податливого внутреннего слоя толщиной $2h_c$ и внешних слоев толщиной $2h_s$ каждая. Схема представлена на рисунке 4.1. В декартовых координатах данная пластина занимает область $0 < x_1 < \infty$ и $|x_2| < h_c$ для мягкого слоя и $h_c < |x_2| < h_c + 2h_c$ для внешних слоев.

Уравнение статического равновесия для каждого из слоев можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_{13}^q}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}^q}{\partial x_2} = 0, \quad q = c, s, \tag{4.1}$$

с

$$\sigma_{13}^q = \mu_q \frac{\partial u^q}{\partial x_1}, \quad \sigma_{23}^q = \mu_q \frac{\partial u^q}{\partial x_2}, \tag{4.2}$$

где $q = c$ для внутреннего слоя (core layer) и $q = s$ для внешних жестких слоев (skin layer), $\sigma_{13}^q = \sigma_{13}^q(x_1, x_2)$, $\sigma_{23}^q = \sigma_{23}^q(x_1, x_2)$ – касательные напряжения, μ_q – параметры Ламе, $u^q = u^q(x_1, x_2)$ – антиплоские смещения, ортогональные плоскости $x_1 x_2$.

Введем малый параметр ε, возникающий из-за высокого контраста жесткости слоев:

$$\varepsilon = \frac{\mu_c}{\mu_s} \ll 1. \tag{4.3}$$

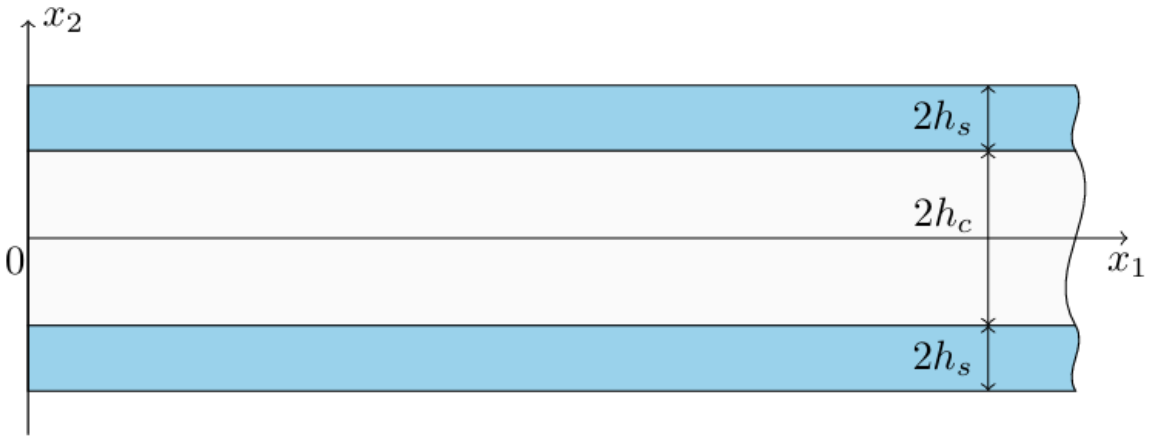


Рисунок 4.1 – Полубесконечная трехслойная упругая пластина

Предполагается, что пластина свободна от напряжений вдоль краев $x_2 = \pm(h_2 + 2h_1)$:

$$u^s = 0, \quad x_2 = \pm(h_2 + 2h_1), \tag{4.4}$$

тогда как на границах раздела $x_2 = \pm h_2$ задана непрерывность перемещений и напряжений:

$$u^c = u^s, \ \sigma_{23}^c = \sigma_{23}^s, \ \ x_2 = \pm h_2. \tag{4.5}$$

Вдоль края $x_1 = 0$ на пластину действует касательное напряжение $p(x_2)$:

$$\sigma_{13}^q \Big|_{x_1=0} = p^q(x_2). \tag{4.6}$$

Введем допущение об экспоненциальном затухании компонент напряжения на бесконечности, что обеспечивается условием

$$\sigma_{13}^q \Big|_{x_1/H\to\infty} = 0, \tag{4.7}$$

где $H = 4h_s + 2h_c$ определяет полную толщину пластины. Условие (4.7) характерно для рассматриваемых высококонтрастных слоистых сред: оно позволяет исключить медленно затухающие моды, длина затухания которых значительно превышает толщину пластины H [80, 111].

Перепишем постановку задачи (4.1)-(4.6) в терминах перемещений:

$$\frac{\partial^2 u^q}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u^q}{\partial x_2^2} = 0, \tag{4.8}$$

с

$$\frac{\partial u^s}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 = \pm(h_c + 2h_s), \tag{4.9}$$

$$\mu_q \frac{\partial u^q}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0} = p^q(x_2), \tag{4.10}$$

$$u^c = u^s, \qquad \mu_c \frac{\partial u^c}{\partial x_2} = \mu_s \frac{\partial u^s}{\partial x_2}, \quad x_2 = \pm h_c, \tag{4.11}$$

и

$$\frac{\partial u^q}{\partial x_1}\bigg|_{x_1/H\to\infty} = 0. \tag{4.12}$$

Проинтегрируем уравнение равновесия (4.1) для жесткого слоя по двум переменным:

$$\int_0^\infty \int_{h_c}^{h_c+2h_s} \left(\frac{\partial \sigma_{13}^s}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}^s}{\partial x_2} \right) dx_2 dx_1 = 0. \tag{4.13}$$

Используя граничные условия и условия непрерывности (4.1)-(4.6), получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_{h_c}^{h_c+2h_s} \left(\frac{\partial \sigma_{13}^s}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}^s}{\partial x_2} \right) dx_2 dx_1 = \int_{h_c}^{h_c+2h_s} \sigma_{13}^s \Big|_{x_1=0}^{\infty} dx_2 + \int_0^\infty \sigma_{23}^s \Big|_{x_2=h_c}^{h_c+2h_s} dx_1 = \\ &- \int_{h_c}^{h_c+2h_s} p^s(x_2) dx_2 - \int_0^\infty \sigma_{23}^s\Big|_{x_2=h_c} dx_1 = 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Далее после подстановки граничных условий получаем выражение, связывающее нагрузку на торец жесткого внешнего слоя с напряжениями вдоль границы раздела:

$$\int_0^\infty \sigma_{23}^s\Big|_{x_2=h_c} dx_1 = -\int_{h_c}^{h_c+2h_s} p^s(x_2) dx_2. \tag{4.15}$$

Аналогично получаем для нижнего слоя выражение

$$\int_0^{\infty} \sigma_{23}^{s}\Big|_{x_2=-h_c} dx_1 = -\int_{-h_c-2h_s}^{-h_c} p^{s}(x_2)dx_2. \tag{4.16}$$

Теперь проинтегрируем уравнение равновесия для мягкого слоя и получим следующее выражение:

$$\int_0^{\infty}\int_{-h_c}^{h_c}\left(\frac{\partial\sigma_{13}^{c}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}^{c}}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = -\int_{-h_c}^{h_c}\sigma_{13}^{c}\Big|_{x_1=0}\mathrm{d}x_2+\int_0^{\infty}\left(\sigma_{23}^{c}\Big|_{x_2=h_c}-\sigma_{23}^{c}\Big|_{x_2=-h_c}\right)\mathrm{d}x_1 = 0. \tag{4.17}$$

Затем, применяя граничные условия (4.6) и учитывая формулы (4.15) и (4.16), мы выводим из (4.17) условие затухания, выражающее саморавновесие приложенной краевой сдвиговой нагрузки в соответствии с классическим принципом Сен-Венана. Запишем полученное условие:

$$\int_{-h_c-2h_s}^{-h_c} p^{s}(x_2)\mathrm{d}x_2+\int_{-h_c}^{h_c} p^{c}(x_2)\mathrm{d}x_2+\int_{h_c}^{h_c+2h_s} p^{s}(x_2)\mathrm{d}x_2 = 0. \tag{4.18}$$

В отличие от однородного случая, это условие не гарантирует сильного затухания (4.7) граничных слоев для рассматриваемого высококонтрастного ламината. Действительно, как было показано впервые в [112], а также в [80, 111], краевая задача (4.8)-(4.11) для бесконечной трехслойной полосы имеет медленно затухающие частные решения вида

$$u^{q} = \Psi_{q}(x_2)\exp\left(-a\sqrt{\varepsilon}\,\frac{x_1}{H}\right), \tag{4.19}$$

где Ψ_q – нечетная функция относительно x_2 и

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h}}(2h+1) \tag{4.20}$$

с

$$h = \frac{h_s}{h_c}, \tag{4.21}$$

полагая, что $h \sim 1$, то есть контраст толщин слоев отсутствует. Легко убедиться, что эти решения удовлетворяют условию затухания (4.18), но нарушают условие сильного затухания (4.7) в области $H \ll x_1 \lesssim H/\sqrt{\varepsilon}$. В данном случае пограничные слои локализованы в окрестности края размером $O(H/\sqrt{\varepsilon})$, что

значительно превышает характерную для однородной постановки область размером $O(H)$.

Таким образом, для обеспечения сильного затухания требуется дополнительное условие. Не ограничивая общности, мы далее предполагаем, что заданная краевая нагрузка $p^q(x_2)$ является нечетной функцией координаты x_2, направленной по толщине.

Проинтегрируем уравнение равновесия для мягкого слоя, помноженное на вертикальную координату x_2:

$$\int_0^{\infty}\int_{-h_c}^{h_c} x_2\left(\frac{\partial\sigma_{13}^c}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}^c}{\partial x_2}\right)dx_2dx_1=0. \tag{4.22}$$

Интегрируя по частям, приходим к следующим соотношениям:

$$\int_0^{\infty}\int_{-h_c}^{h_c} x_2\left(\frac{\partial\sigma_{13}^c}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}^c}{\partial x_2}\right)dx_2dx_1=-\int_{-h_c}^{h_c} x_2p^c(x_2)\,dx_2$$

$$+h_c\int_0^{\infty}\left(\sigma_{23}^c\Big|_{x_2=-h_c}+\sigma_{23}^c\Big|_{x_2=h_c}\right)dx_1-\mu_c\int_0^{\infty}u^c\Big|_{x_2=-h_c}^{h_c}dx_1=0.$$

Используя условия на границе раздела (4.5), а также условия (4.6), (4.7), с учетом нечетности $u^c(x_1,x_2)$ относительно переменной x_2, тогда как $\sigma_{23}^c(x_1,x_2)$ является четной по x_2, преобразуем (4.38) к виду

$$\int_{-h_c}^{h_c} x_2p^c(x_2)\,dx_2+2h_c\int_{h_c}^{h_c+2h_s} p^s(x_2)\,dx_2+2\mu_c\int_0^{\infty}u^s\Big|_{x_2=h_c}dx_1=0. \tag{4.23}$$

Асимптотический анализ, ранее проведенный в [111], показывает, что последний интеграл в (4.24) имеет порядок $O(\varepsilon)$. Пренебрегая им, приходим к выражению

$$\int_{-h_c}^{h_c} x_2p^c(x_2)\,\mathrm{d}x_2+2h_c\int_{h_c}^{h_c+2h_s} p^s(x_2)\,\mathrm{d}x_2=0. \tag{4.24}$$

В отличие от канонического условия затухания (4.18), эта приближенная формула применима только к слоистым структурам с высоким контрастом свойств. Она описывает равновесие моментов напряжений, возникающих под действием краевой нагрузки, приложенной к центральному слою (первое слагаемое в (4.24)), и моментов, обусловленных напряжениями на границах раздела слоев (второе слагаемое в (4.24)). Физический смысл второго слагаемого

вытекает из формул (4.15) и (4.16), выражающих краевые нагрузки, приложенные к жестким слоям, через напряжения на границах раздела.

Цель данного параграфа – вычислить поправку порядка $O(\varepsilon)$ к формуле (4.24) путем оценки последнего интеграла в (4.23) через заданную краевую нагрузку p^q.

4.1.2 Послойное асимптотическое решение

Для построения корректного асимптотического разложения перейдем к безразмерным переменным. Введём следующие масштабы:

$$\xi = \frac{x_1}{h_s},$$
$$\zeta_c = \frac{|x_2|}{h_c}, \quad |x_2| \in (0, h_c), \qquad \zeta_s = \frac{|x_2| - h_c - h_s}{h_s}, \quad |x_2| \in (h_c, h_c + 2h_s). \tag{4.25}$$

Стоит отметить допущение о соизмеримости величин $\sigma_{i3}^q \sim p^q(x_2) \sim \mu_s$, в соответствии с которым безразмерные величины выражаются соотношениями:

$$\sigma_{i3}^q = \mu_s \sigma_{i3}^{q*}, \quad p^q = \mu_s p^{q*}, \quad u^c = \frac{h_s}{\varepsilon} u^{c*}, \quad u^s = h_s u^{s*}. \tag{4.26}$$

Краевая задача (4.8)-(4.12) после масштабирования примет вид:

$$\frac{\partial^2 u^{c*}}{\partial \xi^2} + h^2 \frac{\partial^2 u^{c*}}{\partial \zeta_c^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 u^{s*}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u^{s*}}{\partial \zeta_s^2} = 0, \tag{4.27}$$

$$\left.\frac{\partial u^{s*}}{\partial \zeta_s}\right|_{\zeta_s = 1} = 0, \tag{4.28}$$

$$u^{c*}\Big|_{\zeta_c = 1} = \varepsilon u^{s*}\Big|_{\zeta_s = -1}, \qquad \left.\frac{\partial u^{c*}}{\partial \zeta_c}\right|_{\zeta_c = 1} = \frac{1}{h} \left.\frac{\partial u^{s*}}{\partial \zeta_s}\right|_{\zeta_s = -1}, \tag{4.29}$$

$$\left.\frac{\partial u^{q*}}{\partial \xi}\right|_{\xi = 0} = p^{q*}(\zeta_q), \tag{4.30}$$

и

$$\left.\frac{\partial u^{q*}}{\partial \xi}\right|_{\xi \to \infty} = 0, \tag{4.31}$$

где h определяется выражением (4.21).

Рассмотрим асимптотическое разложение перемещений относительно малого параметра ε:

$$u^{q^*}(\zeta_q) = u_0^q + \varepsilon u_1^q + \varepsilon^2 u_2^q + \cdots. \tag{4.32}$$

Найдем главный порядок приближения краевой задачи (4.27)-(4.31). Начнем с внутреннего податливого слоя. Условие непрерывности (4.29) означает, что в главном приближении внутренний податливый слой фиксируется внешними жесткими слоями таким образом, что перемещения на границе мягкого слоя нулевые. Постановка задачи для внутреннего слоя в главном приближении запишется:

$$\frac{\partial^2 u_0^c}{\partial \xi^2} + h^2 \frac{\partial^2 u_0^c}{\partial \zeta_c^2} = 0, \tag{4.33}$$

с граничными

$$u_0^c\Big|_{\zeta_c=\pm 1} = 0, \qquad \frac{\partial u_0^c}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} = p^{c^*}(\zeta_c), \qquad \frac{\partial u_0^c}{\partial \xi}\bigg|_{\xi\to\infty} = 0. \tag{4.34}$$

Используя метод разделения переменных и полагая, что $u^c(\xi,\zeta_c)$ нечетная относительно ζ_c, найдем решение для перемещений внутреннего мягкого слоя в главном приближении:

$$u_0^c(\xi,\zeta_c) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{0n}^c \sin\left(\frac{\lambda_n}{h}\zeta_c\right) e^{-\lambda_n \xi}, \tag{4.35}$$

где

$$\lambda_n = hn\pi, \tag{4.36}$$

и

$$A_{0n}^c = -\frac{1}{\lambda_n}\int_{-1}^{1} p^{c^*}(\zeta_c)\sin\left(\frac{\lambda_n}{h}\zeta_c\right) d\zeta_c. \tag{4.37}$$

Далее переходим к внешним жестким слоям. Исходя из симметричности пластины, достаточно рассмотреть верхний слой. В главном приближении краевая задача примет вид:

$$\frac{\partial^2 u_0^s}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_0^s}{\partial \zeta_s^2} = 0, \tag{4.38}$$

с граничными

$$\left.\frac{\partial u_0^s}{\partial \zeta_s}\right|_{\zeta_s=1}=0, \qquad \left.\frac{\partial u_0^s}{\partial \zeta_s}\right|_{\zeta_s=-1}=h\left.\frac{\partial u_0^c}{\partial \zeta_c}\right|_{\zeta_c=1} \qquad \left.\frac{\partial u_0^s}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}=p^{s*}(\zeta_s), \tag{4.39}$$

и

$$\left.\frac{\partial u_0^s}{\partial \xi}\right|_{\xi\to\infty}=0. \tag{4.40}$$

По принципу суперпозиции представим решение $u_0^s(\xi,\zeta_s)$ как сумму решений однородной $v_0^s(\xi,\zeta_s)$ и неоднородной задач $w_0^s(\xi,\zeta_s)$:

$$u_0^s(\xi,\zeta_s)=v_0^s(\xi,\zeta_s)+w_0^s(\xi,\zeta_s). \tag{4.41}$$

Неоднородная краевая задача запишется:

$$\frac{\partial^2 w_0^s}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 w_0^s}{\partial \zeta_s^2}=0, \tag{4.42}$$

$$\left.\frac{\partial w_0^s}{\partial \zeta_s}\right|_{\zeta_s=1}=0, \qquad \left.\frac{\partial w_0^s}{\partial \zeta_s}\right|_{\zeta_s=-1}=h\left.\frac{\partial u_0^c}{\partial \zeta_c}\right|_{\zeta_c=1}, \tag{4.43}$$

в то время как постановка однородной задачи примет вид:

$$\frac{\partial^2 v_0^s}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v_0^s}{\partial \zeta_s^2}=0, \tag{4.44}$$

$$\left.\frac{\partial v_0^s}{\partial \zeta_s}\right|_{\zeta_s=\pm1}=0, \qquad \left.\frac{\partial v_0^s}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}=p^{s*}(\zeta_s)-\left.\frac{\partial w_0^s}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}. \tag{4.45}$$

В обоих случаях мы предполагаем, что решение экспоненциально затухает на бесконечности.

Решение для неоднородной задачи (4.42)-(4.43) примет вид

$$w_0^s(\xi,\zeta_s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n A_{0n}^c}{\sin(2\lambda_n)}\cos(\lambda_n(\zeta_s-1))e^{-\lambda_n\xi}. \tag{4.46}$$

Решение однородной задачи (4.44)-(4.45) представим в виде

$$v_0^s\left(\xi,\zeta_s\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_{0n}^s\cos\left(\alpha_n\zeta_s\right)e^{-\alpha_n\xi}+C_{0n}^s\sin\left(\beta_n\zeta_s\right)e^{-\beta_n\xi}\right) \tag{4.47}$$

с собственными числами

$$\alpha_n = n\pi, \quad \beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 1,2,\ldots \tag{4.48}$$

где B_{0n}^s, C_{0n}^s – константы, которые необходимо найти.

4.1.3 Вывод уточненного условия затухания

При вычислении B_{0n}^s, C_{0n}^s, когда мы перезаписываем p^{s*} и w_0^s через собственные функции $\cos(\alpha_n\zeta_s)$ и $\sin(\beta_n\zeta_s)$ в последнем уравнении (4.45), мы приходим к интегральному условию, согласующемуся с условием в ранее опубликованных работах [80, 111]:

$$\int_{-1}^{1} p^{s*}(\zeta_s)\,d\zeta_s + \frac{1}{2h}\int_{-1}^{1} \zeta_c\, p^{c*}(\zeta_c)\,d\zeta_c = 0. \tag{4.49}$$

Данное условие аналогично формуле в главном приближении (4.24).

Находим значения коэффициентов B_{0n}^s, C_{0n}^s:

$$B_{0n}^s = -\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_{-1}^{1} p^{s*}(\zeta_s)\cos(\alpha_n\zeta_s)\,d\zeta_s + \frac{(-1)^n}{2h\sin\left(\dfrac{\alpha_n}{h}\right)}\int_{-1}^{1} p^{c*}(\zeta_c)\sin\left(\frac{\alpha_n}{h}\zeta_c\right)d\zeta_c \right), \tag{4.50}$$

$$C_{0n}^s = -\frac{1}{\beta_n}\left(\int_{-1}^{1} p^{s*}(\zeta_s)\sin(\beta_n\zeta_s)\,d\zeta_s + \frac{(-1)^n}{2h\sin\left(\dfrac{\beta_n}{h}\right)}\int_{-1}^{1} p^{c*}(\zeta_c)\sin\left(\frac{\beta_n}{h}\zeta_c\right)d\zeta_c \right). \tag{4.51}$$

При выводе коэффициентов использовалось известное выражение суммы (см. [113]):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\sin kx}{k^2-\alpha^2} = \pi\frac{\sin\{\alpha[(2m+1)\pi - x]\}}{2\sin\alpha\pi},$$

где $2m\pi < x < (2m+1)\pi, \alpha \notin \mathbb{N}$.

Далее представим условие затухания (4.23) в терминах безразмерных величин:

$$\int_{-1}^{1} p^{s*}(\zeta_s)\,\mathrm{d}\zeta_s + \frac{1}{2h}\int_{-1}^{1} \zeta_c p^{c*}(\zeta_c)\,\mathrm{d}\zeta_c + \varepsilon h \int_{0}^{\infty} u^{s*}\big|_{\zeta_s=-1}\,\mathrm{d}\xi = 0. \tag{4.52}$$

Подставляя главное приближение u_0^s в u^{s*}, выводим искомое уточненное условие затухания:

$$\int_{-1}^{1} p^{s*}(\zeta_s)\,\mathrm{d}\zeta_s + \frac{1}{2h}\int_{-1}^{1} \zeta_c p^{c*}(\zeta_c)\,\mathrm{d}\zeta_c + \varepsilon h \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{B_{0n}^s}{\alpha_n} + \frac{C_{0n}^s}{\beta_n} + \frac{A_{0n}^c \cot(2\lambda_n)}{\lambda_n}\right) = 0. \tag{4.53}$$

Используя формулы для B_{0n}^s, C_{0n}^s и A_{0n}^c (см. (4.50), (4.51) и (4.37) соответственно), а также суммы рядов

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(\alpha_n\zeta_s)}{\alpha_n^2} &= \frac{\zeta_s^2}{4} - \frac{1}{12},\\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(\beta_n\zeta_s)}{\beta_n^2} &= -\frac{\zeta_s}{2},
\end{aligned} \tag{4.54}$$

выведенное условие становится

$$\int_{-1}^{1} p^{s*}(\zeta_s)\{1+\varepsilon Q_s(\zeta_s)\}\,\mathrm{d}\zeta_s + \frac{1}{2h}\int_{-1}^{1} p^{c*}(\zeta_c)\{\zeta_c + \varepsilon Q_c(\zeta_c)\}\,\mathrm{d}\zeta_c = 0, \tag{4.55}$$

где

$$\begin{aligned}
Q_s &= -h\left(\frac{\zeta_s^2}{4} - \frac{\zeta_s}{2} - \frac{1}{12}\right),\\
Q_c &= -h\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\alpha_n}{h}\zeta_c\right)}{\alpha_n^2\sin\left(\frac{\alpha_n}{h}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\beta_n}{h}\zeta_c\right)}{\beta_n^2\sin\left(\frac{\beta_n}{h}\right)} + 2h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^2}\sin\left(\frac{\lambda_n}{h}\zeta_c\right)\cot(2\lambda_n)\right).
\end{aligned} \tag{4.56}$$

В размерных переменных условие запишется

$$\int_{h_c}^{h_c+2h_s} p^s(x_2)\{1+\varepsilon Q_s(x_2)\}\,\mathrm{d}x_2 + \frac{1}{2}\int_{-h_c}^{h_c} p^c(x_2)\left\{\frac{x_2}{h_c} + \varepsilon Q_c(x_2)\right\}\mathrm{d}x_2 = 0, \tag{4.57}$$

где

$$Q_s = -\frac{3(x_2 - h_c)^2 - 12h_s(x_2 - h_c) + 8h_s^2}{12h_c h_s},$$

$$Q_c = -h\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\alpha_n x_2}{h_s}\right)}{\alpha_n^2 \sin\left(\frac{\alpha_n}{h}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\beta_n x_2}{h_s}\right)}{\beta_n^2 \sin\left(\frac{\beta_n}{h}\right)} + 2h\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^2} \sin\left(\frac{\lambda_n x_2}{h_s}\right)\cot(2\lambda_n) \right). \quad (4.58)$$

4.1.4 Частный случай равной толщины слоев

Анализ (4.56) показывает, что бесконечные ряды в Q_c содержат множители $\sin(\alpha_n / h)$ и $\sin(\beta_n / h)$ в знаменателях, которые могут обращаться в нуль при определенных значениях n, если h – рациональное число. Следовательно, необходимо отдельно рассматривать случаи, когда отношение толщин слоев h – рациональные значения. В качестве примера рассмотрим частный случай $h = 1$, при котором толщина внутреннего податливого слоя равна толщине внешних жестких слоев, т.е. $h_c = h_s$.

Алгоритм построения главного приближения для внутреннего слоя аналогичен общему случаю. Главное приближение для внутреннего слоя имеет тот же вид, что и полученное в общей постановке задачи. Подставляя $h = 1$ в (4.35), получим

$$u_0^c(\xi, \zeta_c) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{0n}^c \sin(\alpha_n \zeta_c) e^{-\alpha_n \xi}, \quad (4.59)$$

где

$$\alpha_n = \lambda_n = n\pi, \quad (4.60)$$

и

$$A_{0n}^c = -\frac{1}{\lambda_n} \int_{-1}^{1} p^{c*}(\zeta_c) \sin(\lambda_n \zeta_c) d\zeta_c. \quad (4.61)$$

Отличия возникают при решении неоднородной задачи для главного приближения внешнего слоя. В частном случае решение имеет вид

$$\omega_0^s(\xi, \zeta_s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{0n}^c}{2} \left(\sin(\lambda_n \zeta_s) - \zeta_s \sin(\lambda_n \zeta_s) - \xi \cos(\lambda_n \zeta_s) \right) e^{-\lambda_n \xi}, \quad (4.62)$$

в то время как решение однородной задачи имеет тот же вид, что и в общем случае (4.47), при этом коэффициенты B_{0n}^s и C_{0n}^s определяются следующими выражениями:

$$B_{0n}^{s}=-\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_{-1}^{1}p^{s*}(\zeta_s)\cos(\alpha_n\zeta_s)d\zeta_s-\frac{1}{2\alpha_n}\int_{-1}^{1}p^{c*}(\zeta_c)\sin(\alpha_n\zeta_c)d\zeta_c\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}p^{c*}(\zeta_c)\zeta_c\cos(\alpha_n\zeta_c)d\zeta_c\right) \tag{4.63}$$

$$C_{0n}^{s}=-\frac{1}{\beta_n}\left(\int_{-1}^{1}p^{s*}(\zeta_s)\sin(\beta_n\zeta_s)d\zeta_s-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}p^{c*}(\zeta_c)\sin\left(\beta_n\zeta_c\right)d\zeta_c\right) \tag{4.64}$$

Подставляя u^{s*} в выражение (4.52), получаем поправку ко второму условию затухания для частного случая равенства толщин слоев:

$$\int_{-1}^{1}p^{s*}(\zeta_s)d\zeta_s+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\zeta_c p^{c*}(\zeta_c)d\zeta_c+\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{B_{0n}^{s}}{\alpha_n}+\frac{C_{0n}^{s}}{\beta_n}-\frac{A_{0n}^{c}}{2\alpha_n^2}\right)=0. \tag{4.65}$$

Используя формулы (4.63), (4.64) и (4.61), и следующие суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(\alpha_n\zeta_c)}{\alpha_n^3}=\frac{\zeta_c^3-\zeta_c}{12},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(\alpha_n\zeta_c)}{\alpha_n^2}=\frac{3\zeta_c^2-1}{12}, \tag{4.66}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(\beta_n\zeta_c)}{\beta_n^2}=-\frac{\zeta_c}{2},$$

выражаем условие (4.65) в более элегантной форме:

$$\int_{-1}^{1}p^{s*}(\zeta_s)\left\{1+\varepsilon Q_s(\zeta_s)\right\}\mathrm{d}\zeta_s+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}p^{c*}(\zeta_c)\left\{\zeta_c+\varepsilon Q_c(\zeta_c)\right\}\mathrm{d}\zeta_c=0, \tag{4.67}$$

где полином Q_s задается (4.56) при $h=1$, а Q_c определяется выражением

$$Q_c=-\frac{\zeta_c^3+7\zeta_c}{12}. \tag{4.68}$$

Возвращаемся к формуле (4.56) для Q_c в общем случае: подставляем $h=1+\delta$ и полагаем, что $\delta\ll 1$. В результате мы получаем выражение с точностью порядка $O(\delta)$:

$$Q_c = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin(\alpha_n\zeta_c)}{\alpha_n^3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin(\beta_n\zeta_c)}{\beta_n^2} - \zeta_c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos(\alpha_n\zeta_c)}{\alpha_n^2}. \qquad (4.69)$$

Применяя формулы для сумм рядов (4.66), мы приходим к выражению (4.68). Это показывает, что особенность общего решения (4.56) при $h=1$ является устранимой. Описанный предельный переход можно легко адаптировать для других особенностей в (4.56).

4.1.5 Численные примеры

Рассмотрим сначала полином Q_s, заданный формулой (4.56). На рис. 4.2 показано изменение этого полинома по толщине при $h=1$ наряду с полиномом Q_c, определенным в (4.68). В общем случае функция Q_c демонстрирует более сложное поведение, обусловленное влиянием параметра толщины h на сходимость ряда (4.56).

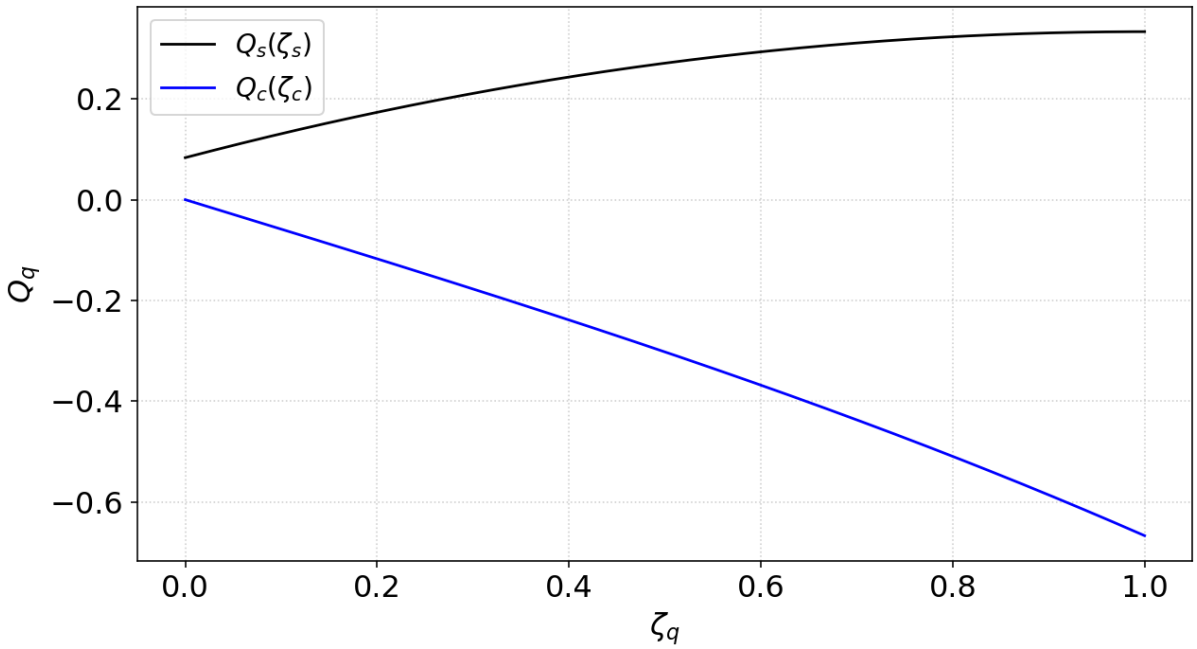


Рисунок 4.2 – Полиномы Q_s и Q_c, определенные формулами (4.56), (4.68) при $h=1$

На рис. 4.3, 4.4 и 4.5 функция Q_c представлена для значений $h=0.3\sqrt{10}$, $h=\sqrt{10}$ и $h=0.1\sqrt{10}$, соответственно. Ограничение бесконечного ряда в (4.58) даже десятью членами $N=10$ при $h=0.3\sqrt{10}$ (черная штриховая линия на рис. 4.3) обеспечивает приемлемую точность, что следует из сравнения с красной сплошной линией на том же рисунке, соответствующей ограничению $N=150$. При $h=\sqrt{10}$ (см. рис. 4.4) кривая для $N=10$ имеет лишь незначительные, но все

же различимые отклонения от кривой для $N=150$, последнее можно объяснить влиянием членов более высоких порядков в рассматриваемом ряде.

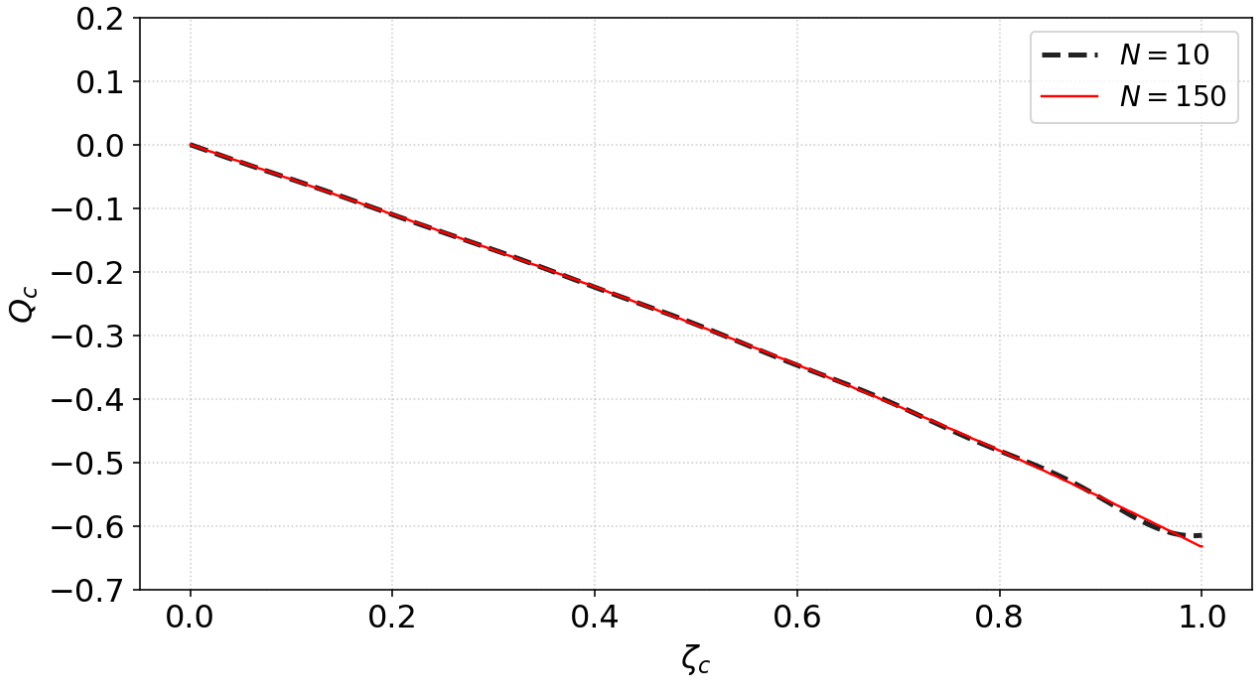


Рисунок 4.3 – Поправочный член Q_c, определяемый по формуле (4.56), при $h=0.3\sqrt{10}$ для двух различных значений индекса суммирования N

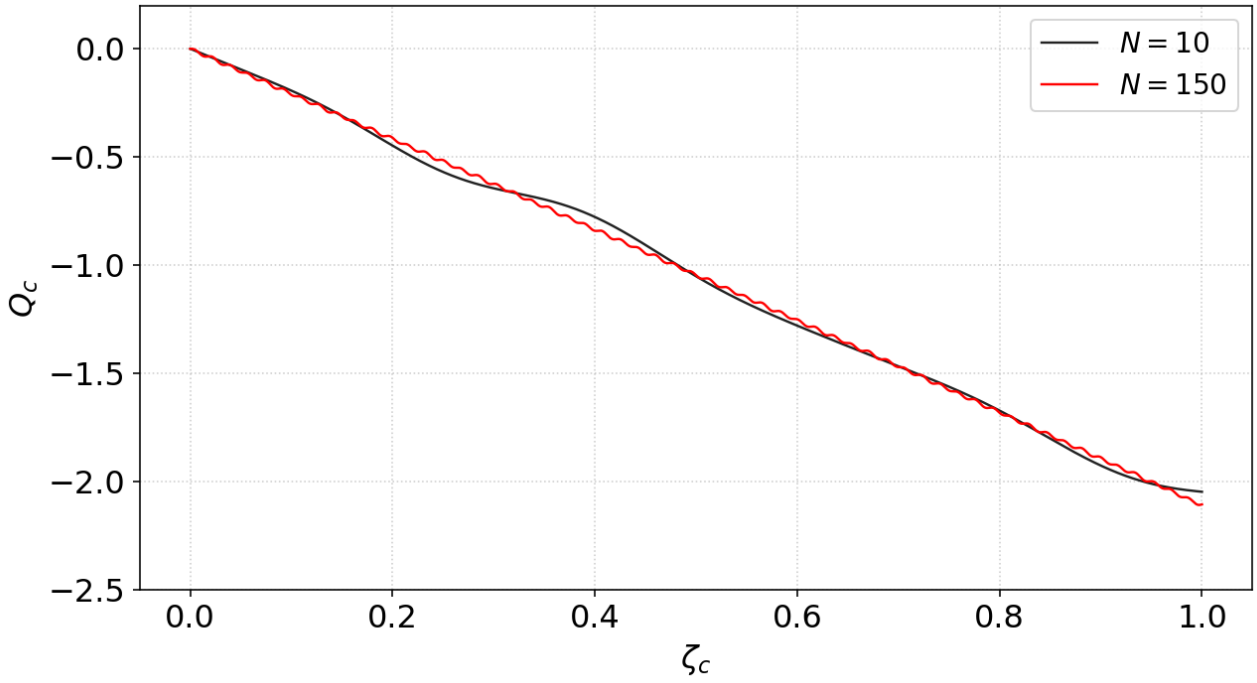


Рисунок 4.4 – Поправочный член Q_c, определяемый по формуле (4.56), при $h=\sqrt{10}$ для двух различных значений индекса суммирования N

Рисунок 4.5 иллюстрирует случай медленной сходимости: здесь наблюдается заметное расхождение между кривыми для $N=10$, $N=20$ и $N=150$. На рисунке 4.6 показан частный случай равенства толщин слоев $h=1$. Здесь функция Q_c вычислена по формуле (4.56) для ряда значений h, близких к 1. Хорошо видна сходимость к предельному полиному (4.68).

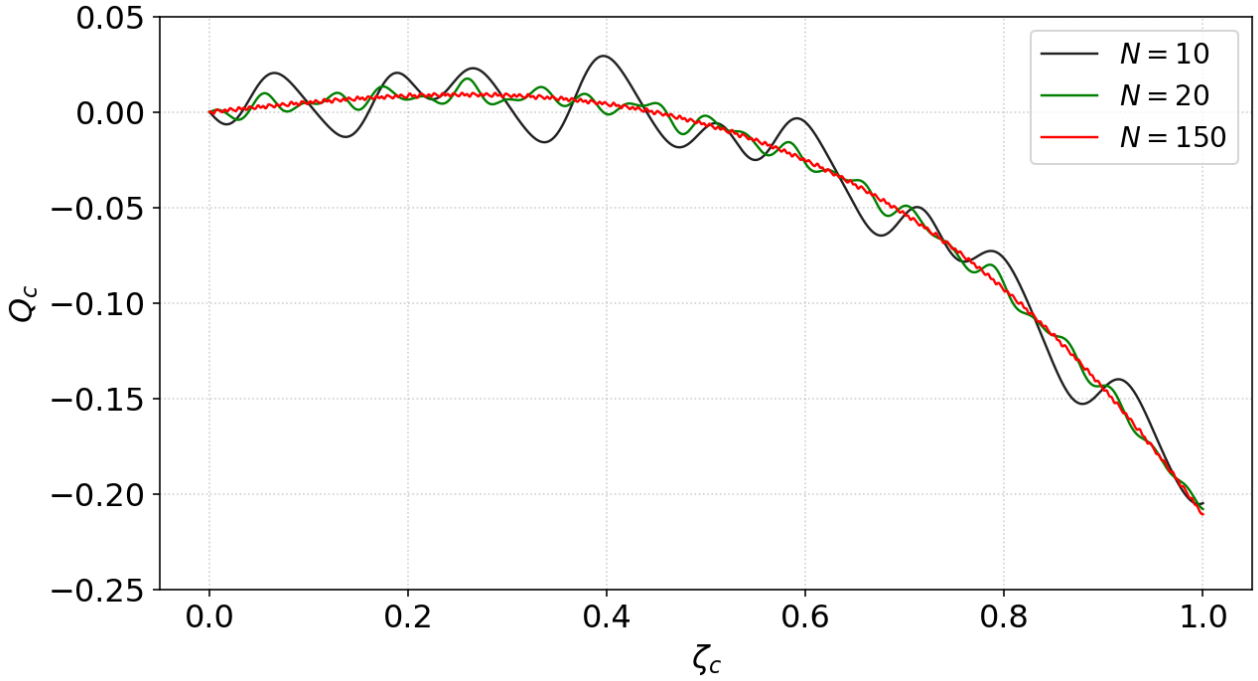


Рисунок 4.5 – Поправочный член Q_c, определяемый по формуле (4.56), при $h=0.1\sqrt{10}$ для нескольких различных значений индекса суммирования N

Таким образом, в данном параграфе выведена поправка порядка $O(\varepsilon)$ к асимптотическому условию затухания (4.24), полученному в главном приближении. Поправка описывается уточненной формулой (4.57), содержащей функции переменной толщины x_2, обозначенные как Q_s и Q_c; при этом Q_s представляет собой полином, а Q_c задается суммой бесконечных рядов (см. (4.58)). Сходимость Q_c существенно зависит от величины отношения толщин h.

Примечательно, что полученная формула имеет особенности при рациональных значениях h. Анализ частного случая $h=1$ показывает, что особенность является устранимой: в этом случае функция Q_c в (4.56) сходится к предельному полиному, задаваемому формулой (4.68). Это наблюдение побуждает к дальнейшему анализу всех особых случаев в рамках будущих исследований.

Результаты могут быть использованы при моделировании сэндвич-панелей, слоистых композитных материалов, а также демпфирующих элементов с резинокордными прослойками, включая виброзащитные муфты, где важную

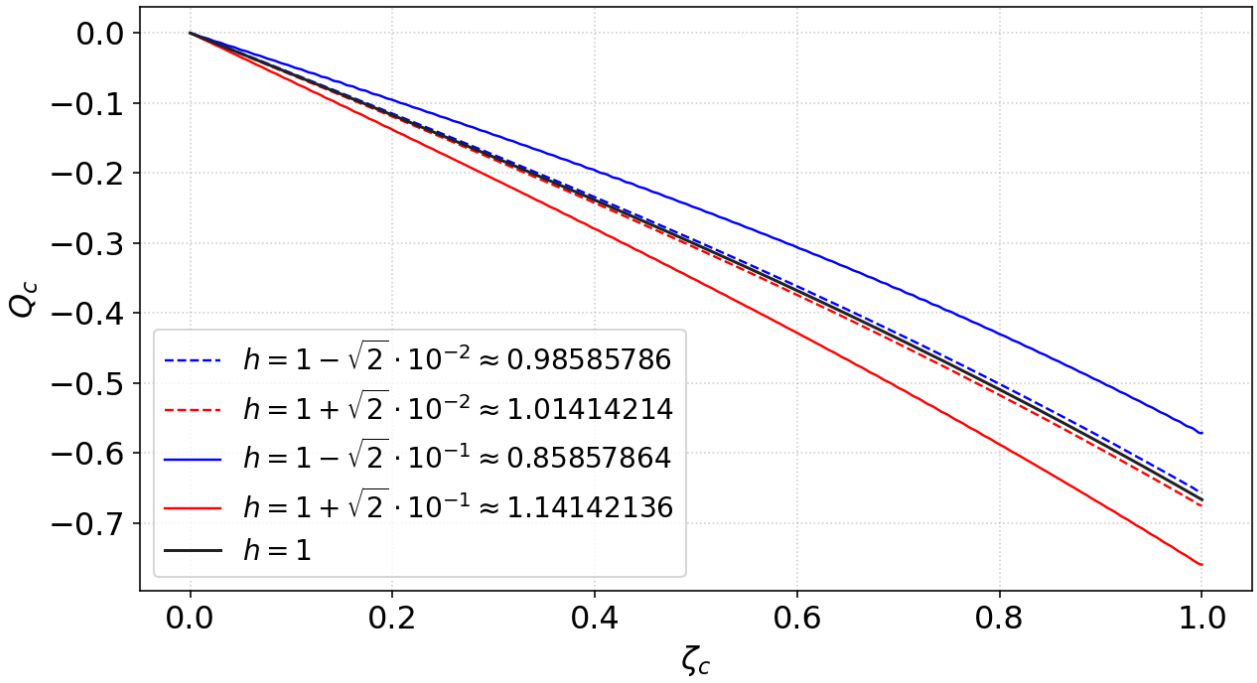


Рисунок 4.6 – Поправочный член Q_c, определяемый по формуле (4.56), для иррациональных значений h, близких к 1, в сравнении с частным случаем $h = 1$, определяемым формулой (4.68)

роль играет распределение сдвиговых деформаций и напряжений вблизи зон приложения нагрузки. Еще одним полезным направлением развития может стать применение разработанной послойной асимптотической процедуры к более сложным многослойным структурам, начиная с асимметричных трехслойных конструкций. Для последних условие затухания в главном приближении было получено в работах [80, 111].

4.2 Уточнение принципа Сен-Венана для упругих пластин на нелинейном основании типа Винклера

Методика, представленная в параграфе 4.1, была обобщена на случай нелинейного основания типа Винклера. Традиционно модель Винклера используется для локального описания отклика внешней демпфирующей среды или виброизоляционного слоя, где реакция основания полагается пропорциональной прогибу, что берет свое начало в классических трудах [81, 114, 115] и находит место в современных исследованиях [82, 116, 117, 118]. В контексте разработки виброзащитных систем особый интерес представляет влияние физической нелинейности материала основания на характер изменения краевых эффектов. Для анализа внутреннего напряженного состояния вдали от края осуществляется переход от двумерного уравнения Лапласа к одномерной осредненной задаче, что требует формулирования граничных условий для длинноволнового приближения. Установлено, что в присутствии упругого основания краевая нагрузка перестает быть строго самоуравновешенной в

классическом понимании: наличие внешнего взаимодействия приводит к асимптотическому характеру затухания напряжений. Это обуславливает необходимость пересмотра канонического принципа Сен-Венана, сформулированного в классических трудах, и его уточнения путем введения поправок высшего порядка, учитывающих жесткостные и нелинейные характеристики демпфирующего слоя.

4.2.1 Сведение двумерной задачи антиплоского сдвига к одномерному осредненному уравнению

Рассмотрим антиплоский сдвиг полубесконечной изотропной пластины толщиной $2h$ на нелинейном основании Винклера с двух сторон. Традиционно в литературе рассматривают опирание на основание с одной стороны, что характерно для практических задач механики контактного взаимодействия и геомеханики [82, 119, 120], однако для простоты рассмотрим двустороннее опирание. Схема пластины представлена на рисунке 4.7. Уравнение равновесия в терминах напряжения запишется

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} = 0, \tag{4.70}$$

где

$$\sigma_{31} = \mu \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \sigma_{32} = \mu \frac{\partial u}{\partial x_2}. \tag{4.71}$$

Граничные условия представим в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_{32}\big|_{x_1=\pm h} = \mp\left(k_1 u + k_2 u^3\right), \\ &\sigma_{31}\big|_{x_1=0} = p(x_2), \quad \sigma_{31}\big|_{x_1=\infty} = 0. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Для анализа внутренней задачи обезразмерим модель, используя следующие масштабы:

$$\xi = \frac{x_1}{L}, \quad \zeta = \frac{x_2}{h}. \tag{4.73}$$

Полагая, что продольные размеры слоя много превышают его поперечные размеры, вводим малый параметр ε

$$\sqrt{\varepsilon} = \frac{h}{L} \ll 1. \tag{4.74}$$



Рисунок 4.7 – Пластина на двустороннем нелинейном основании Винклера

Введем безразмерные перемещения $u^* = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}u$, тогда компоненты тензора напряжений примут вид

$$\sigma_{31} = \frac{\mu}{L}\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\frac{\partial u^*}{\partial \xi},\ \sigma_{32} = \frac{\mu}{h}\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\frac{\partial u^*}{\partial \zeta}. \tag{4.75}$$

Безразмерные напряжения в новой системе координат одного порядка $\sigma_{31}^* \sim \sigma_{32}^*$. Запишем уравнение (4.70) в новых координатах. Безразмерные напряжения относительно размерных примут вид

$$\sigma_{31}^* = \frac{L}{\mu}\sqrt{\frac{k_2}{k_2}}\sigma_{31},\ \sigma_{32}^* = \varepsilon^{-4}\frac{h}{\mu}\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\sigma_{32}. \tag{4.76}$$

Подставляя (4.76) в уравнение (4.70), получим уравнение в новых координатах

$$\sigma_{31,\xi}^* + \sigma_{32,\zeta}^* = 0. \tag{4.77}$$

Для определения асимптотического порядка напряжений относительно малого параметра ε перейдем от соотношения безразмерных напряжений $\sigma_{31}^* \sim \sigma_{32}^*$ к размерным $L\sigma_{31} \sim h\varepsilon^{-4}\sigma_{32}$. Через определение малого параметра приходим к соотношению $\sigma_{32} \sim \varepsilon^2\sigma_{31}$, что определяет малость поперечного

сдвигового напряжения в сравнении с продольным $\sigma_{32} \ll \sigma_{31}$. Это подтверждает наше допущение о длинноволновом характере деформации во внутренней области пластины, где $L \gg h$, что позволяет перейти к одномерному уравнению.

После подстановки (4.74), (4.76) в (4.71) в безразмерных координатах закон Гука запишется

$$\sigma_{31}^{*} = \frac{\partial u^{*}}{\partial \xi}, \quad \varepsilon^{4} \sigma_{32}^{*} = \frac{\partial u^{*}}{\partial \zeta}. \tag{4.78}$$

Условие на торце пластины в безразмерных координатах принимает вид

$$\sigma_{31}^{*}\Big|_{\xi=0} = p^{*}(\zeta), \tag{4.79}$$

где $p^{*} = \frac{L}{\mu}\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}p$. Нагрузка $p^{*}(\zeta)$ масштабируется с учетом геометрических и материальных параметров системы.

Граничные условия (4.72) становятся

$$\varepsilon^{4} \frac{\mu}{hk_1} \sigma_{32}^{*}\Big|_{\zeta=\pm 1} = \mp\left\{u^{*} + \left(u^{*}\right)^{3}\right\}. \tag{4.80}$$

Потребуем выполнение равенства $\frac{\varepsilon^{4}\mu}{hk_1} = 1$, накладывающее условие на длину L:

$$L = \sqrt{\frac{h\mu}{k_1}}. \tag{4.81}$$

Условие (4.81) определяет характерный масштаб длины пластины не только геометрией, но и соотношением между сдвиговой жесткостью пластины μ и коэффициентом жесткости основания k_1. Отметим, что из условия (4.81), учитывая, что $L \gg h$, вытекает важное соотношение физико-геометрических параметров

$$\frac{hk_1}{\mu} \ll 1, \tag{4.82}$$

соответствующее слабому основанию Винклера ($k_1 \ll \mu$).

Граничные условия с учетом соотношения (4.82) в безразмерных координатах принимают вид

$$\sigma_{32}^{*}\Big|_{\zeta=\pm1}=\mp\left\{u^{*}+\left(u^{*}\right)^{3}\right\}. \tag{4.83}$$

Таким образом, постановка задачи в новых координатах ξ,ζ принимает вид

$$\sigma_{31,\xi}^{*}+\sigma_{32,\zeta}^{*}=0, \tag{4.84}$$

$$\sigma_{31}^{*}\Big|_{\xi=0}=p^{*}\left(\zeta\right),\quad \sigma_{31}^{*}\Big|_{\xi=\infty}=0,\quad \sigma_{32}^{*}\Big|_{\zeta=\pm1}=\mp\left\{u^{*}+\left(u^{*}\right)^{3}\right\}, \tag{4.85}$$

где $\sigma_{31}^{*}=\dfrac{\partial u^{*}}{\partial\xi},\quad \varepsilon^{4}\sigma_{32}^{*}=\dfrac{\partial u^{*}}{\partial\zeta}$.

Асимптотически раскладываем переменные по малому параметру

$$\begin{aligned} u^{*}&=u^{(0)}+\varepsilon u^{(1)}+\ldots,\\ \sigma_{3i}^{*}&=\sigma_{3i}^{(0)}+\varepsilon\sigma_{3i}^{(1)}+\ldots, \end{aligned} \tag{4.86}$$

подставляем в краевую задачу (4.84)-(4.85). В главном приближении приходим к задаче

$$\begin{aligned} &\sigma_{31,\xi}^{(0)}+\sigma_{32,\zeta}^{(0)}=0,\\ &\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\zeta}=0,\quad \sigma_{31}^{(0)}=\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\xi},\\ &\sigma_{32}^{(0)}\Big|_{\zeta=\pm1}=\mp\left\{u^{(0)}+\left(u^{(0)}\right)^{3}\right\},\\ &\sigma_{31}^{(0)}\Big|_{\xi=0}=p^{*}\left(\zeta\right). \end{aligned} \tag{4.87}$$

Интегрируем по толщине $\zeta\in[-1,1]$; вводим осредненное перемещение $U=U\left(\xi\right)$:

$$u^{(0)}=U\left(\xi\right). \tag{4.88}$$

Уравнение равновесия в (4.87) сводится к виду

$$\frac{d^{2}U}{d\xi^{2}}+\sigma_{32,\zeta}^{(0)}=0, \tag{4.89}$$

где $\sigma_{31}^{(0)}=\dfrac{dU}{d\xi}$. После интегрирования по толщине преобразуем уравнение к виду

$$2\frac{d^2U}{d\xi^2}+\left[\sigma_{32}^{(0)}\right]_{\zeta=-1}^{\zeta=1}=0. \tag{4.90}$$

Используя граничные условия из (4.87), получаем одномерное уравнение равновесия для осредненного перемещения

$$\frac{d^2U}{d\xi^2}-U-U^3=0. \tag{4.91}$$

Полученное уравнение для осредненного перемещения описывает баланс между внутренними силами сдвига и нелинейной реакцией основания Винклера.

Заключительным этапом является формулировка уточненного граничного условия для осредненной задачи (4.91). Согласно принципу Сен-Венана, пограничный слой (зона возмущений у края) затухает в пределах порядка h и не влияет на решение в глубине пластины, если невязка $Q(\zeta)=\sigma_{31}^{(0)}\Big|_{\xi=0}-p^*(\zeta)$ самоуравновешенная, то есть выполняется условие

$$\int_{-1}^{1}Q(\zeta)d\zeta=0. \tag{4.92}$$

Из условия невязки получаем граничное условие для осредненной задачи

$$\left.\frac{dU}{d\xi}\right|_{\xi=0}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}p^*(\zeta)d\zeta. \tag{4.93}$$

Исследуем вопрос, может ли это условие быть уточнено и что будет, если, например, нагрузка является самоуравновешенной.

4.2.2 Вывод условий затухания

Для вывода условия затухания на границе рассмотрим уравнение вблизи края. Обезразмерим уравнение (4.70) с использованием характерных масштабов

$$\xi=\frac{x_1}{h},\quad \zeta=\frac{x_2}{h},\ \sigma_{3i}^*=\frac{\sigma_{3i}}{\mu},\quad p=\frac{p}{\mu},\quad u^*=\frac{u}{h}, \tag{4.94}$$

где размеры зоны пограничного слоя сопоставимы с толщиной пластины $2h$. Из (4.74) и (4.81) получаем $\sqrt{\varepsilon}=\dfrac{h}{L}=\sqrt{\dfrac{k_1h}{\mu}}\ll 1$.

Задача в безразмерных координатах в терминах перемещений примет вид

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \zeta^2} = 0 \tag{4.95}$$

с граничными

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial u^*}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=\pm 1} = \mp \varepsilon u^* \left(1 + \gamma \left(u^*\right)^2\right), \\ &\left.\frac{\partial u^*}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = p^*(\zeta), \quad \left.\frac{\partial u^*}{\partial \xi}\right|_{\xi=\infty} = 0, \end{aligned} \tag{4.96}$$

где $\gamma = \frac{k_2}{k_1} h^2 \sim 1$ – параметр, определяющий кубическую нелинейность.

В терминах напряжений уравнение (4.95) примет вид

$$\frac{\partial \sigma_{31}^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{32}^*}{\partial \zeta} = 0. \tag{4.97}$$

Проинтегрируем уравнение (4.97) по области $0 \le \xi < \infty, -1 \le \zeta \le 1$, используя граничные условия (4.96), получим условие для нагрузки (обобщенный принцип Сен-Венана):

$$\int_{-1}^{1} p^* d\zeta + \varepsilon \int_0^{\infty} \left(u^* \left(1 + \gamma \left(u^*\right)^2\right)\Big|_{\zeta=1} + u^* \left(1 + \gamma \left(u^*\right)^2\right)\Big|_{\zeta=-1} \right) d\xi = 0. \tag{4.98}$$

Физический смысл данного выражения заключается в том, даже самоуравновешенная часть нагрузки вносит неоднородность в граничные условия вследствие влияния податливого основания Винклера. При наличии упругого основания мы можем получить поправку к классическому принципу Сен-Венана.

Разложим нагрузку на торце и перемещения в асимптотический ряд:

$$\begin{aligned} p^* &= p_0^* + \varepsilon p_1^* + \varepsilon^2 p_2^* + ..., \\ u^* &= u_0^* + \varepsilon u_1^* + \varepsilon^2 u_2^* + ... \end{aligned} \tag{4.99}$$

Положим, что нагрузка в главном приближении самоуравновешенная, то есть выполняется условие

$$\int_{-1}^{1} p_0^* d\zeta = 0, \tag{4.100}$$

а остальные члены разложения – константы. Найдем главное приближение и поправку в асимптотическом разложении.

В главном приближении (4.98) дает классический принцип Сен-Венана, а решение будет

$$u_0^* = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^{(0)}}{\alpha_n} \cos\left(\alpha_n \zeta\right) e^{-\alpha_n \xi}, \tag{4.101}$$

где

$$\alpha_n = \pi n,\ A_n^{(0)} = \int_{-1}^{1} p_0^*\left(\zeta\right) \cos \alpha_n \zeta d\zeta. \tag{4.102}$$

Для двустороннего Винклера обобщенный принцип Сен-Венана (4.98) в первом приближении (члены при ε) запишется

$$\int_{-1}^{1} p_1^* d\zeta + \int_0^{\infty} \left(u_0^* \left(1 + \gamma \left(u_0^*\right)^2\right)\Big|_{\zeta=1} + u_0^* \left(1 + \gamma \left(u_0^*\right)^2\right)\Big|_{\zeta=-1} \right) d\xi = 0, \tag{4.103}$$

с учетом четности перемещений

$$\int_{-1}^{1} p_1^* d\zeta = -2\int_0^{\infty} \left(u_0^* \left(1 + \gamma \left(u_0^*\right)^2\right)\Big|_{\zeta=1} \right) d\xi. \tag{4.104}$$

Подставим главное приближение (4.101) в (4.104), учитывая (4.103):

$$\int_{-1}^{1} p_1^* d\zeta = 2\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^{(0)}}{\alpha_n} \cos\left(\alpha_n \zeta\right) e^{-\alpha_n \xi} + \gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^{(0)}}{\alpha_n} \cos\left(\alpha_n \zeta\right) e^{-\alpha_n \xi} \right)^3 \right)\Bigg|_{\zeta=1} d\xi$$

или

$$\int_{-1}^{1} p_1^* d\zeta = 2\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^{(0)}}{\alpha_n} \left(-1\right)^n e^{-\alpha_n \xi} \right) d\xi + 2\gamma \int_0^{\infty} \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^{(0)}}{\alpha_n} \left(-1\right)^n e^{-\alpha_n \xi} \right)^3 \right) d\xi \tag{4.105}$$

Формула разложения куба бесконечной суммы может быть записана формулой

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)^3 = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^3 + 3\sum_{i \neq j}^{\infty} f_i^2 f_j + 6\sum_{i<j<k}^{\infty} f_i f_j f_k \tag{4.106}$$

либо формулой через перестановки

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)^3 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_i f_j f_k. \tag{4.107}$$

Используя первую формулу (4.106) разложения куба бесконечной суммы, приходим к выражению

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} p_1^* d\zeta = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^{(0)}}{\alpha_n^2}(-1)^n + 2\gamma \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(A_i^{(0)}\right)^3}{\alpha_i^3}(-1)^i e^{-3\alpha_i \xi} d\xi \\
&+6\gamma \int_0^{\infty} \sum_{i\neq j}^{\infty} \frac{\left(A_i^{(0)}\right)^2 A_j^{(0)}}{\alpha_i^2 \alpha_j}(-1)^j e^{-(2\alpha_i+\alpha_j)\xi} d\xi + \\
&12\gamma \int_0^{\infty} \sum_{i<j<k}^{\infty} \frac{A_i^{(0)} A_j^{(0)} A_k^{(0)}}{\alpha_i \alpha_j \alpha_k}(-1)^{i+j+k} e^{-(\alpha_i+\alpha_j+\alpha_k)\xi} d\xi,
\end{aligned} \tag{4.108}$$

Запишем обобщенную формулу для нагрузки $\int_{-1}^{1} p^* d\zeta = \int_{-1}^{1} p_0^* d\zeta + \varepsilon \int_{-1}^{1} p_1^* d\zeta$. Учитывая, что в главном приближении нагрузка самоуравновешенная (4.100), а главное приближение в правой части формулы (4.108) можно записать как $\varepsilon p_0^* = \varepsilon p^* - \varepsilon^2 p_1^*$ и член $\varepsilon^2 p_1^*$ опустить, формула (4.108) примет вид в общем виде

$$\int_{-1}^{1} p^* d\zeta + \varepsilon Q = 0, \tag{4.109}$$

где

$$\begin{aligned}
&Q = -\int_{-1}^{1} p^*(\zeta)\left(\frac{1}{2}\zeta^2 - \frac{1}{6}\right) d\zeta - 2\gamma \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{3\alpha_i^4} A_i^3 - 6\gamma \sum_{i\neq j}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\alpha_i^2 \alpha_j (2\alpha_i + \alpha_j)} A_i^2 A_j \\
&-12\gamma \sum_{i<j<k}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j+k}}{\alpha_i \alpha_j \alpha_k (\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k)} A_i A_j A_k, \\
&\left(\int_{-1}^{1} p^*(\zeta) \cos \alpha_i \zeta d\zeta\right) = A_i
\end{aligned} \tag{4.110}$$

Полученное выражение (4.109) – асимптотическое условие затухания, связывающее интеграл торцевой нагрузки с высшими гармониками A_i и параметром нелинейности γ.

Возвращаясь к (4.93), с учетом (4.109), в общем виде граничное условие для осредненного уравнения запишется следующим образом

$$\left.\frac{dU}{d\xi}\right|_{\xi=0} = -\frac{\varepsilon}{2}Q. \tag{4.111}$$

4.2.3 Частные случаи. Влияние параметров основания на поправочный член к классическому условию затухания

Рассмотрим частные случаи и проанализируем влияние параметра нелинейного основания и коэффициентов модального разложения нагрузки на выполнение условий затухания. Перемещение в главном приближении для одной моды

$$u_0^* = -\frac{A_0^{(0)}}{\alpha_0}\cos(\alpha_0\zeta)e^{-\alpha_0\xi}, \tag{4.112}$$

где $\alpha_0 = \pi m$, $A_0^{(0)} = \int_{-1}^{1} p_0^*(\zeta)\cos\alpha_0\zeta d\zeta$, m – любое целое число.

Поправочный член Q (4.110) запишется

$$Q = -\frac{2(-1)^m}{\alpha_0^2}\left[A_0 + \frac{\gamma}{3\alpha_0^2}A_0^3\right], \tag{4.113}$$

где $A_0 = \int_{-1}^{1} p^*(\zeta)\cos(\alpha_0\zeta)d\zeta$.

Для двух мод (для простоты возьмем первые две моды) в главном приближении решение будет

$$u_0^* = -\frac{A_1^{(0)}}{\pi}\cos(\pi\zeta)e^{-\pi\xi} - \frac{A_2^{(0)}}{2\pi}\cos(2\pi\zeta)e^{-2\pi\xi}, \tag{4.114}$$

где $A_1^{(0)} = \int_{-1}^{1} p_0^*(\zeta)\cos\pi\zeta d\zeta$, $A_2^{(0)} = \int_{-1}^{1} p_0^*(\zeta)\cos 2\pi\zeta d\zeta$.

Поправочный член для двух мод, используя обозначения

$$A_1 = \int_{-1}^{1} p^*(\zeta)\cos\pi\zeta d\zeta, \quad A_2 = \int_{-1}^{1} p^*(\zeta)\cos 2\pi\zeta d\zeta, \tag{4.115}$$

принимает вид

$$Q = -2\left[-\frac{A_1}{\pi^2} + \frac{A_2}{4\pi^2} - \frac{\gamma(A_1)^3}{3\pi^4} + \frac{3\gamma(A_1)^2 A_2}{8\pi^4} - \frac{3\gamma A_1(A_2)^2}{20\pi^4} + \frac{\gamma(A_2)^3}{48\pi^4}\right]. \tag{4.116}$$

Исследуем влияние нелинейности основания на поправку в условии Сен-Венана. Так, для одной моды можем построить поправочный член Q от коэффициента A_0 при различных γ. Положим $m=7$.

Из рисунка 4.8 можно проанализировать, как нелинейность основания искажает классическую линейную связь. При $\gamma=0$ (линейное основание) зависимость представляет собой прямую. При положительных γ зависимость носит монотонный характер и описывается нелинейным полиномом третьей степени; при отрицательных γ монотонность теряется, поправочный член вырождается (обращается в ноль) сразу при нескольких значениях амплитуды первой моды.

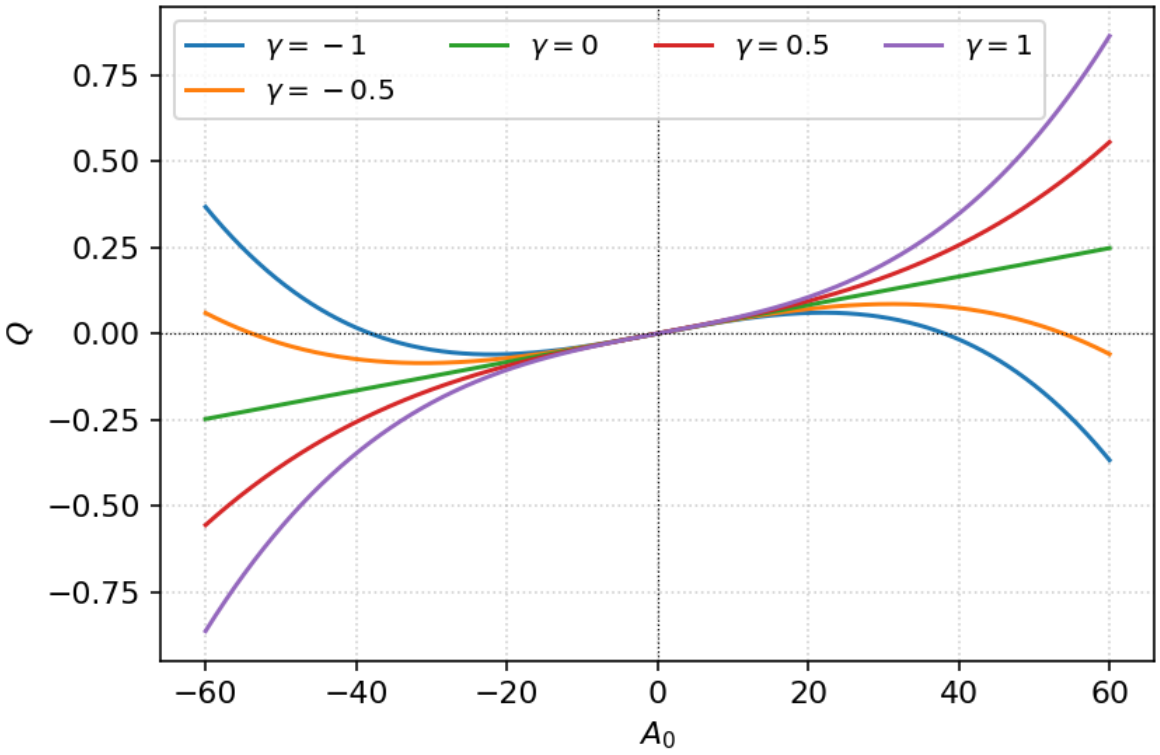
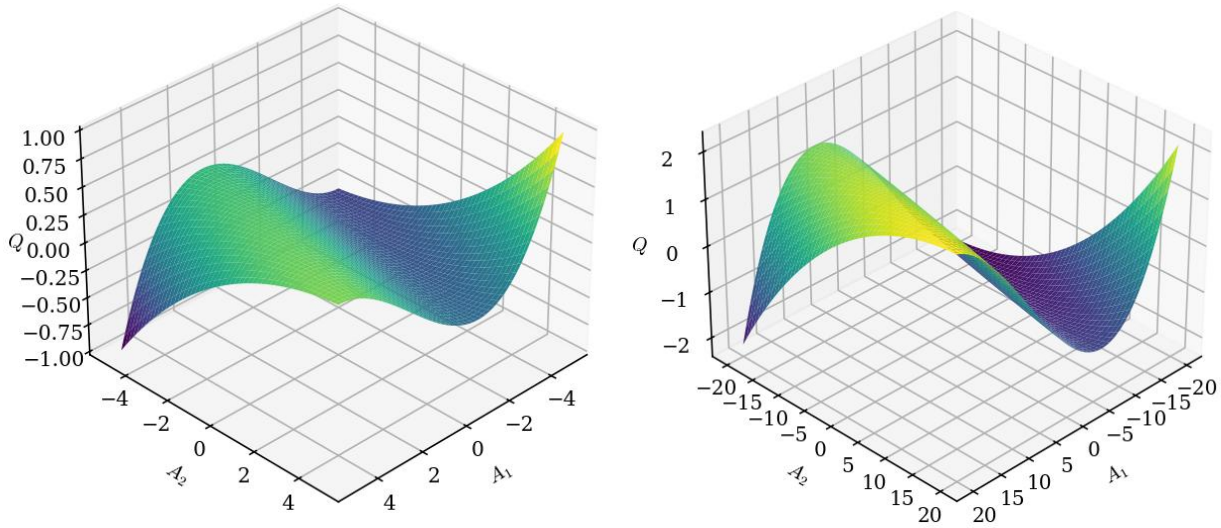


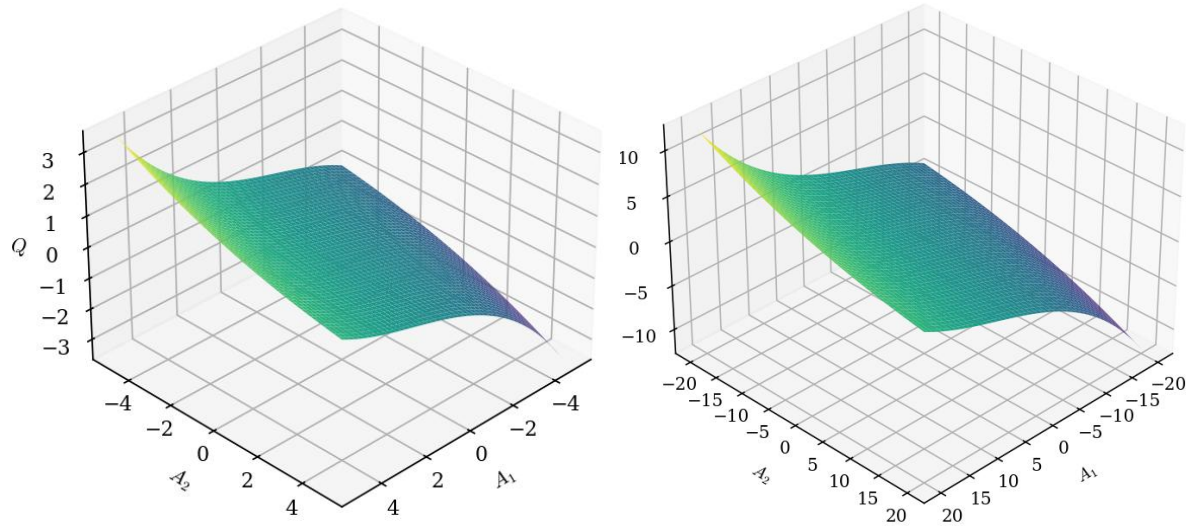
Рисунок 4.8 – Зависимость поправочного члена от амплитуды первой моды A_0 при варьировании параметра нелинейности γ

На рисунках 4.9-4.10 представлены графики зависимости значений поправочного члена от амплитуд первых двух мод Фурье A_1, A_2 при разных значениях параметра нелинейности γ. Характер двумерной зависимости качественно повторяет результаты, полученные для одной моды: при положительных γ поверхность функции поправки монотонна, что обеспечивает однозначную разрешимость связывающего уравнения относительно двух первых коэффициентов Фурье. Тогда как при отрицательных значениях γ монотонность нарушается, формируются поверхности со сложной топологией, допускающей нескольких возможных комбинаций амплитуд.



a) b)

Рисунок 4.9 – Зависимость значений поправочного члена от амплитуд первых двух мод Фурье при a) $\gamma = -1$, b) $\gamma = -0.05$



a) b)

Рисунок 4.10 – Зависимость значений поправочного члена от двух первых коэффициентов Фурье при a) $\gamma = 1$, b) $\gamma = 0.05$

Пересечение поверхности с плоскостью $Q = 0$ определяет множество допустимых комбинаций амплитуд, обеспечивающих вырождение поправочного члена. На графиках 4.11-4.12 показаны линии, вдоль которых поправочный член вырождается. При положительных γ пересечение поверхности с плоскостью $Q = 0$ дает единственную непрерывную кривую, однозначно устанавливая связь между допустимыми амплитудами (рисунок 4.11). Тогда как при отрицательных γ наблюдается сложная топология линий вырождения поправки, то есть существуют несколько пар решений (рисунок 4.12).

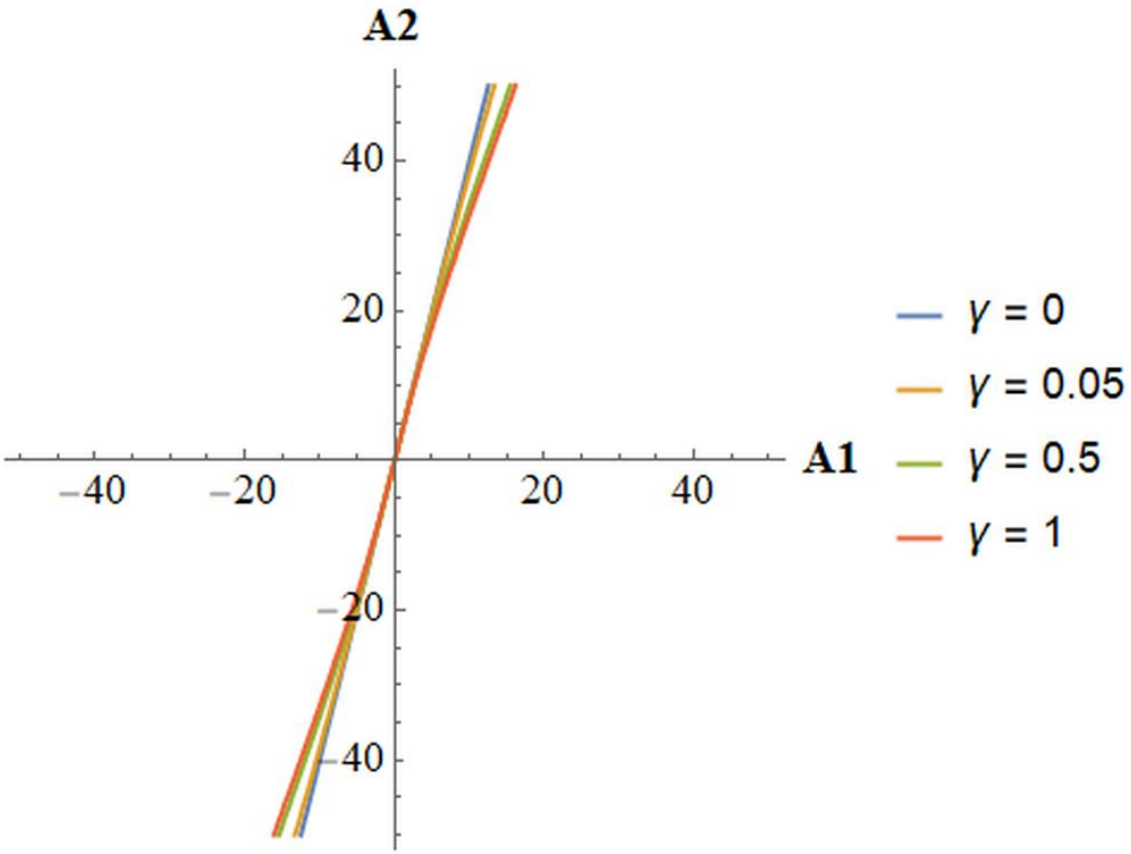


Рисунок 4.11 – Линии вырождения поправки при положительных значениях γ

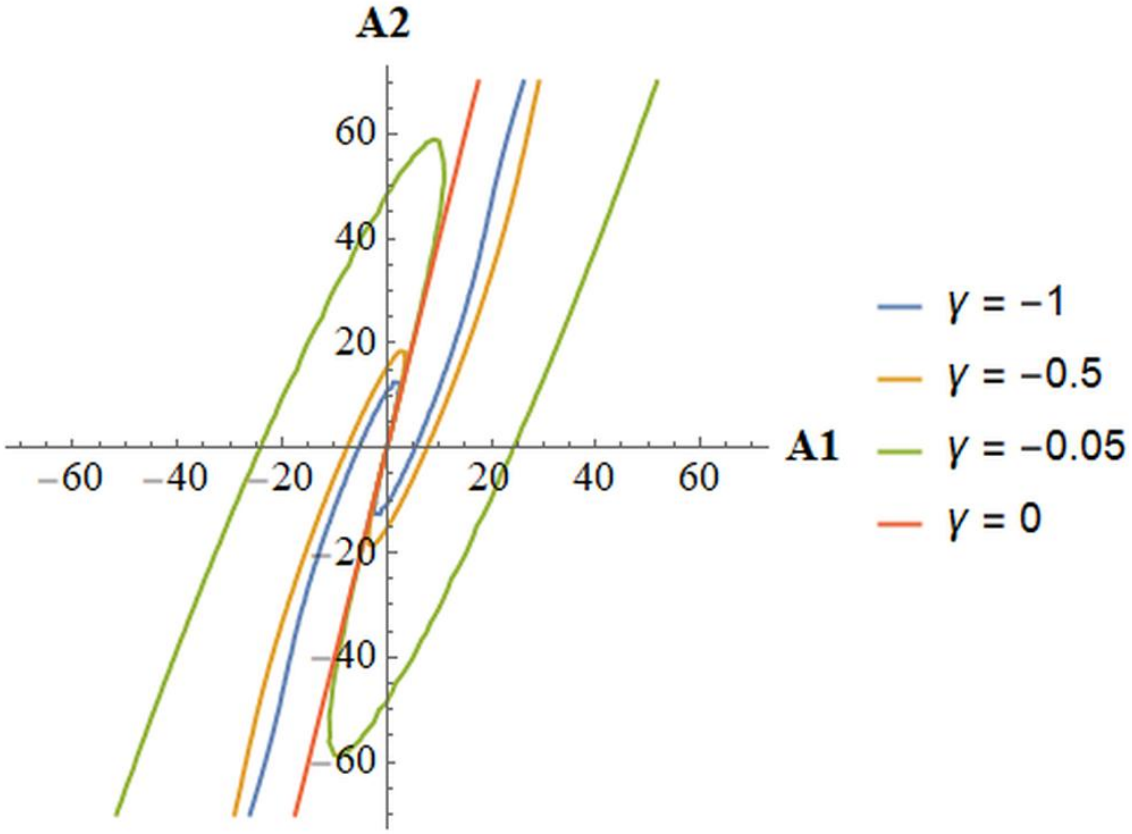


Рисунок 4.12 – Линии вырождения поправки при отрицательных значениях γ

Таким образом, асимптотически двумерная задача антиплоского сдвига сведена к одномерной модели пластины на нелинейном основании Винклера. Получено обобщенное условие затухания (модифицированный принцип Сен-Венана), учитывающее кубическую нелинейность. Сформулировано уточненное граничное условие для осредненного перемещения. Проведен параметрический анализ.

Выводы по разделу 4

В параграфах 4.1 проведен асимптотический анализ краевых задач для полубесконечных трехслойных высококонтрастных пластин, что может служить математической базой для уточненного моделирования напряженно-деформированного состояния демпфирующих элементов бурильных колонн. Путем введения малого параметра контрастности и разделения решения на внутреннее и локальное были выведены уточненные условия затухания для общего случая и частного случая равной толщины слоев, что дает возможность корректно сводить многомерные задачи теории упругости к низкоразмерным осредненным моделям. Полученные результаты позволяют уточнить классический принцип Сен-Венана, который вырождается в высококонтрастных средах, и обеспечить теоретическую основу для оптимизации параметров виброзащитных устройств и предотвращения преждевременного разрушения их резинокордных слоев. По результатам параграфа опубликована статья [121].

В параграфе 4.2 разработана и обоснована асимптотическая методика перехода от двумерной задачи антиплоского сдвига к одномерному уравнению равновесия, описывающего равновесие тонкого слоя, взаимодействующего с нелинейно-упругим основанием Винклера. Сформулировано уточненное граничное условие, которое явно учитывает вклад нелинейных характеристик основания. Оно основано на обобщенном условии затухания, соответствующее модифицированному принципу Сен-Венана в случае основания с кубической нелинейностью. Проведен параметрический анализ для самоуравновешенной нагрузки, допускающей одно- и двухчленное разложение в ряд Фурье по толщине слоя. При этом, в частности, установлено, что при некоторых значениях нелинейного параметра, полученная поправка к принципу Сен-Венана может вырождаться при определенных комбинациях коэффициентов Фурье.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация содержит новые научно обоснованные результаты. Их совокупность является достижением в моделировании динамики и виброзащиты нелинейных деформируемых систем.

На основе полученных результатов диссертационной работы были сделаны следующие выводы:

1. **Обобщение нелинейных моделей динамики бурильных колонн в потоке газа на случай включения опорных стабилизаторов и физически нелинейной континуальной демпфирующей муфты.** Модели новы, разработка их численных моделей основана на применении метода сосредоточенных параметров.
2. **Разработан новый универсальный программно-вычислительный комплекс** на языке C++ с применением технологий параллельного программирования, позволяющее проводить высокоэффективный анализ нелинейных колебаний стержневых систем. Использование метода сосредоточенных параметров в сочетании с алгоритмической оптимизацией (матричные преобразования, масштабируемость) обеспечило высокую точность и скорость расчетов сложных динамических процессов. Установлено, что учет геометрической нелинейности является критическим фактором для обеспечения устойчивости численного решения и адекватного отображения физики колебаний.
3. **Эффективность нового разработанного программно-вычислительного комплекса верифицирована на трех тестовых задачах.** Результаты показали хорошую согласованность с результатами, известными в литературе. Общность ПВК позволяет применять его для широкого класса задач динамики стержневых систем с произвольным числом виброзащитных элементов.
4. На основе ПВК **проведен многопараметрического анализа нелинейных колебаний бурильных колонн с учетом влияния внешних факторов**. Установлено:

   а) увеличение угловой скорости вращения и продольной нагрузки существенно влияет на повышение амплитуды и изменение частоты колебаний колонны;

   б) характеристики промывочной жидкости (плотность, скорость потока) оказывают влияние на динамический отклик системы, в связи с чем при разработке скважин необходимо тщательно подбирать скоростные режимы и тип жидкости;

   в) учет собственного веса колонны приближает модель к реальным условиям, приводит к существенному увеличению амплитуды колебаний и качественному изменению профиля изгиба, вносит в фазовые траектории асимметрию и снижает их структурированность.
5. **Выявлены закономерности работы виброзащитных устройств:**

а) наличие стабилизаторов приводит к кратному уменьшению амплитуды изгибных колебаний бурильной колонны;

б) установлено существенное влияние количества используемых стабилизаторов и их расположения на процесс виброзащиты бурильной колонны. При этом один стабилизатор, установленный в серединном сечении колонны, обеспечивает сопоставимый уровень снижения изгибных колебаний с двумя стабилизаторами в сечениях $0.25L, 0.75L$. Полученные результаты свидетельствуют о том, что рациональное расположение стабилизаторов может быть более эффективным, чем увеличение их количества;

в) использование материалов с низкими жесткостными характеристиками существенно снижает виброзащитные свойства системы. Показано, что коэффициент жесткости опорного стабилизатора, обеспечивающий эффективное снижение колебаний при глубоком бурении, оказывается недостаточным при малых длинах бурильной колонны. При этом результативность применения стабилизатора возрастает с увеличением длины колонны;

г) при кратном увеличении продольной нагрузки применение опорных стабилизаторов позволяет сохранить характер колебательного процесса и амплитуды колебаний;

д) учет демпфирующей муфты как инерционного нелинейного сплошного тела позволяет выявить скрытые механизмы диссипации энергии: включение муфты в кинематическую цепь приводит к уменьшению амплитуды поперечных колебаний колонны со временем за счет рассеяния части энергии;

е) установлена высокая чувствительность амплитуд поперечных колебаний к толщине, длине и коэффициенту демпфирования муфты (с ростом данных параметров повышается эффективность демпфирования), что указывает на необходимость целенаправленной параметрической оптимизации при проектировании виброзащитных систем;

ж) наиболее эффективным местом размещения демпфирующей муфты является серединное поперечное сечение.

6. Проведен асимптотический анализ локальных краевых эффектов, позволивший обобщить принцип Сен-Венана для высококонтрастных слоистых пластин, а также для однородных пластин на нелинейно-упругом податливом основании. Получены новые граничные условия для эффективных уравнений, возникающих при осреднении двумерных антиплоских задач теории упругости для тонких пластин.

В ходе исследования опубликовано 11 работ [53, 102, 103, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128]**.**

Достоверность полученных результатов подтверждена верификацией разработанных алгоритмов на трех тестовых задачах с возрастающей сложностью, показавшей высокую сходимость с известными литературными данными. Использован метод линеаризации уравнений движения для

сопоставления с классическими решениями, что позволило подтвердить корректность предложенных нелинейных моделей. Асим

Оценка полноты решений поставленных задач. Поставленные в диссертации задачи выполнены в полном объеме. Разработаны математические модели, создано программное обеспечение, проведен многопараметрический анализ динамических режимов и теоретическое исследование краевых эффектов. Цель работы (развитие методов моделирования нелинейной динамики для повышения эффективности виброзащиты) достигнута.

Рекомендации по конкретному использованию полученных результатов. Разработанный программный комплекс рекомендуется к использованию в прогнозировании динамики бурильных колонн и подбора оптимальных режимов бурения. Предложенные методики размещения стабилизаторов и параметры демпфирующих муфт могут быть использованы при проектировании новых систем виброзащиты бурового оборудования. Асимптотические методы уточнения краевых условий рекомендуются для использования в инженерных расчетах широко применяемых высококонтрастных композитных материалов и слоистых конструкций.

Оценка технико-экономической эффективности внедрения. Результаты проведенных исследований (математические модели, программно-вычислительный комплекс, методы виброзащиты и уточнение принципа Сен-Венана) могут быть внедрены в нефтегазовой, машиностроительной, строительной и др. отраслях промышленности. Предлагаемые автором работы методы анализа и виброзащиты нелинейных деформируемых систем направлены на улучшение динамических характеристик конструкций, снижение рисков аварийных режимов, увеличение срока службы оборудования за счет предварительного моделирования. Все это имеет положительный технико-экономический эффект.

Оценка научного уровня выполненной работы в сравнении с лучшими достижениями в данной области. Работа соответствует современному мировому уровню исследований в области естествознания. Научная новизна заключается в интеграции физически и геометрически нелинейных моделей в динамику протяженных стержневых систем и применении асимптотического анализа для уточнения краевых теорий высококонтрастных композитов. По уровню вычислительной реализации (параллельное программирование, дискретизация локально-связанных тел) работа превосходит существующие упрощенные линейные аналоги, обеспечивая более точный прогноз поведения систем в экстремальных условиях эксплуатации. Результаты исследований конкурентоспособны, выполнены на высоком научном уровне.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Energy system of Kazakhstan [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.iea.org/countries/kazakhstan (дата обращения: 09.05.2026).

2 Басарыгин Ю.М. Бурение нефтяных и газовых скважин: учеб. пособие для вузов / Ю. М. Басарыгин, А. И. Булатов, Ю. М. Проселков. – М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 2002. – 632 с.

3 Zamani S.M. Failure analysis of drill pipe: A review / S. M. Zamani, S. A. Hassanzadeh-Tabrizi, H. Sharifi // Engineering Failure Analysis. – 2016. – Vol. 59. – P. 605-623.

4 Предеин, А. П. Осложнения и аварии при строительстве нефтяных скважин. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2014. – 381 с.

5 Ghasemloonia A. A review of drillstring vibration modeling and suppression methods / A. Ghasemloonia, D. Geoff Rideout, S. D. Butt // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2015. – Vol. 131. – P. 150-164.

6 Adair D. A power series solution for rotating nonuniform Euler-Bemoulli cantilever beams // Journal of Vibration and Control. – 2018. – Vol. 24. – No. 17. – P. 3855-3864.

7 Nourifar M. Free vibration analysis of rotating Euler-Bemoulli beam with exponentially varying cross-section by differential transform method / M. Nourifar, A. Keyhani, A. Aftabi Sani // International Journal of Structural Stability and Dynamics. – 2018. – Vol. 18. – No. 2. – Art. 1850024.

8 Ruiz A. Exact general solution and first integrals of a remarkable static Euler-Bernoulli beam equation / A. Ruiz, C. Muriel, J. Ramírez // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2019. – Vol. 69. – P. 261-269.

9 Chinwuba Ike C. Timoshenko Beam Theory for the Flexural Analysis of Moderately Thick Beams – Variational Formulation, and Closed Form Solution / C. Chinwuba Ike // Technica Italiana-Italian Journal of Engineering Science. – 2019. – Vol. 63. – No. 1. – P. 34-45.

10 Chen Y. Free vibration analysis of rotating tapered Timoshenko beams via variational iteration method / Y. Chen, J. Zhang, H. Zhang // Journal of Vibration and Control. – 2017. – Vol. 23. – No. 2. – P. 220-234.

11 Gulyayev V. I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells / V. I. Gulyayev, O. I. Borshch // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2011. – Vol. 78. – No. 3-4. – P. 759-764.

12 Andrusenko E. N. The buckling of a drill string in a curvilinear borehole with axial line imperfections / E. N. Andrusenko, V. I. Gulyayev, S. N. Khudolii // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2012. – Vol. 76. – No. 3. – P. 330-336.

13 Ерофеев В. И. Нелинейные изгибные и крутильные волны в стержнях и стержневых системах // Вестник научно-технического развития. – 2009. – No. 4(20). – С. 46-50.

14 Сергалиев А. С. Нелинейная модель движения буровой штанги с учетом влияния сил трения о стенки скважины // Вестник НАН РК. – 2017. – No. 1(365). – С. 42-48.

15 Zhu K. Nonlinear lateral vibrations of a deploying Euler–Bernoulli beam with a spinning motion / K. Zhu, J. Chung // International Journal of Mechanical Sciences. – 2015. – Vol. 90. – P. 200-212.

16 Yan Q. Nonlinear dynamics of axially moving viscoelastic Timoshenko beam under parametric and external excitations / Q. Yan, H. Ding, L. Chen // Applied Mathematics and Mechanics. – 2015. – Vol. 36. – No. 8. – P. 971-984.

17 Кудайбергенов А. К. Моделирование нелинейной динамики деформируемых систем в задачах бурения / А. К. Кудайбергенов. – Алматы: КазНУ им. аль-Фараби, 2018. – 110 с.

18 Кудайбергенов А. К. Динамическая устойчивость бурильных колонн с нелинейно-упругими характеристиками. – Алматы : КазНУ им. аль-Фараби, 2018. – 115 с.

19 Умбеткулова А. Б. Моделирование нелинейной динамики буровых штанг неглубинного бурения с учетом осложняющих факторов / А. Б. Умбеткулова. – Алматы: КазНУ им. аль-Фараби, 2017. – 153 с.

20 Сергалиев А. С. Моделирование нелинейной и стохастической динамики буровых штанг неглубинного бурения. – Алматы: КазНУ им. аль-Фараби, 2020. – 140 с.

21 Novozhilov V. V. Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity / V. V. Novozhilov. – New York: Dover Publications, 1999. – 217 p.

22 Применение биополимерных растворов для эффективного вскрытия продуктивных горизонтов горизонтальных скважин / Х. А. Сарсенбаев, Б. С. Хамзина, Г. А. Колдасова, Г. Б. Исаева // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2017. – Т. 312. – No. 2. – С. 161-165.

23 Исследование влияния замковых соединений на вынужденный колебательный процесс бурильной колонны / А. Бараев, М. Ж. Жумабаев, Н. М. Ахметов [и др.] // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2015. – Т. 300. – No. 2. – С. 44-49.

24 Нугуманов К. К. Новые технические решения в конструкциях буровых поршней / К. К. Нугуманов, Н. М. Исагулов // Вестник КазНТУ. – 2015. – Т. 108. – No. 2. – С. 147-152.

25 Christoforou A. P. Dynamic modelling of rotating drillstrings with borehole interactions / A. P. Christoforou, A. S. Yigit // Journal of Sound and Vibration. – 1997. – Vol. 206. – No. 2. – P. 243-260.

26 Ahmadian H. Drill string vibration modeling including coupling effects / H. Ahmadian, S. Nazari, H. Jalali // International Journal of Industrial Engineering & Production Research. – 2007. – Vol. 18. – No. 3-4. – P. 59-66.

27 Optimal design and nonlinear dynamic characteristics of titanium /steel drill pipe composite drill string for ultra-deep drilling / Q. Liu, B. Zhou, F. Chen [et al.] // Scientific Reports. – 2023. – Vol. 13. – No. 1. – Art. 20491.

28 Vibration-collision mechanism of dual-stabilizer bottom hole assembly system in vertical wellbore trajectory / P. Fang, K. Yang, G. Li [et al.] // Journal of Vibroengineering. – 2023. – Vol. 25. – No. 2. – P. 226-246.

29 Study on lateral vibration characteristics of BHA with double-span drill collar / Z. Tao, Y. Meng, X. Huang [et al.] // Advances in Mechanical Engineering. – 2024. – Vol. 16. – No. 5. – Art. 16878132241245351.

30 Nonlinear rub-impact characteristics of drillstring-wellbore and wear quantitative evaluation method / F. Tang, Y. Liu, J. Xia [et al.] // Geoenergy Science and Engineering. – 2025. – Vol. 244. – Art. 213466.

31 Tikhonov V. S. Analysis of Postbucking Drillstring Vibrations in Rotary Drilling of Extended-Reach Wells / V. S. Tikhonov, A. I. Safronov // 28th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. – Honolulu, Hawaii, USA : ASMEDC, 2009. – Vol. 43475. – P. 419-427.

32 Nonlinear Dynamics of a Drillstring Immersed in a 3D Curved Well, Simulations and Experiments / K.-L. Nguyen, M. Mahjoub, Q.-T. Tran [et al.] // IADC/SPE International Drilling Conference and Exhibition. – Galveston, Texas, USA : SPE, 2020. – Art. D082S000R004.

33 Van Der Heijden G. H. M. Bifurcation and chaos in drillstring dynamics / G. H. M. Van Der Heijden // Chaos, Solitons & Fractals. – 1993. – Vol. 3. – No. 2. – P. 219-247.

34 Yigit A. S. Coupled torsional and bending vibrations of drillstrings subject to impact with friction / A. S. Yigit, A. P. Christoforou // Journal of Sound and Vibration. – 1998. – Vol. 215. – No. 1. – P. 167-181.

35 Analysis of a Downhole Passive Regulator in Drilling: A Distributed Parameter Modeling Approach / A. G. Aribowo, U. J. F. Aarsnes, K. Chen [et al.] // Journal of Sound and Vibration. – 2025. – Vol. 618. – Art. 119300.

36 Panayirci H. M. Hole enlargement by drillstring stabilizers / H. M. Panayirci // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2019. – Vol. 180. – P. 22-30.

37 Analysis and Control of Stick-Slip Oscillations in Drilling Systems / B. Besselink, T. Vromen, N. Kremers, N. Van De Wouw // IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2016. – Vol. 24. – No. 5. – P. 1582-1593.

38 Alqaradawi M. Y. Nonlinear stochastic drillstrings vibrations: parametric study for stick-slip suppression / M. Y. Alqaradawi, M. Kanzari, B. Balachandran // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 1075. – Art. 012059.

39 Observer and reference governor based control strategy to suppress stick-slip vibrations in oil well drill-string / M. Fu, P. Zhang, J. Li, Y. Wu // Journal of Sound and Vibration. – 2019. – Vol. 457. – P. 37-50.

40 Vaziri V. Suppression of Drill-String Stick-Slip Vibration / V. Vaziri, M. Kapitaniak, M. Wiercigroch // MATEC Web of Conferences. – 2018. – Vol. 148. – Art. 16008.

41 Ren F. Modeling and analysis of stick-slip vibration and bit bounce in drillstrings / F. Ren, B. Wang // Journal of Vibroengineering. – 2017. – Vol. 19. – No. 7. – P. 4866-4881.

42 Experimental studies of forward and backward whirls of drill-string / M. Kapitaniak, V. Vaziri, J. Páez Chávez, M. Wiercigroch // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2018. – Vol. 100. – P. 454-465.

43 State Dependent Delayed Drill-string Vibration: Theory, Experiments and New Model / M. Wiercigroch, K. Nandakumar, L. Pei [et al.] // Procedia IUTAM. – 2017. – Vol. 22. – P. 39-50.

44 Unveiling complexity of drill–string vibrations: Experiments and modelling / M. Kapitaniak, V. Vaziri Hamaneh, J. Páez Chávez [et al.] // International Journal of Mechanical Sciences. – 2015. – Vols. 101-102. – P. 324-337.

45 Complex dynamics of drill-strings: Theory and experiments / M. Wiercigroch, M. Kapitaniak, V. Vaziri, K. Nandakumar // MATEC Web of Conferences. – 2018. – Vol. 211. – Art. 01002.

46 Kapitaniak M. Torsional vibrations of helically buckled drill-strings: experiments and FE modelling / M. Kapitaniak, V. V. Hamaneh, M. Wiercigroch // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – Vol. 721. – Art. 012012.

47 Toshniyozov L. Analysis of drill bit speed in bit-rock interaction with the use of numerical simulation methods / L. Toshniyozov, M. Mamatov // E3S Web of Conferences. – 2020. – Vol. 201. – Art. 01006.

48 Ritto T. G. Validation of a drill string dynamical model and torsional stability / T. G. Ritto, R. R. Aguiar, S. Hbaieb // Meccanica. – 2017. – Vol. 52. – No. 11-12. – P. 2959-2967.

49 Khajiyeva, L. The effect of gas and fluid flows on nonlinear lateral vibrations of rotating drill strings / L. Khajiyeva, A. Kudaibergenov, A. Kudaibergenov // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2018. – Vol. 59. – P. 565-579.

50 Liang F. Dynamical analysis of spinning functionally graded pipes conveying fluid with multiple spans / F. Liang, A. Gao, X.-D. Yang // Applied Mathematical Modelling. – 2020. – Vol. 83. – P. 454-469.

51 Pei Y.-C. Dynamics of rotating conveying mud drill string subjected to torque and longitudinal thrust / Y.-C. Pei, Y.-H. Sun, J.-X. Wang // Meccanica. – 2013. – Vol. 48. – No. 9. – P. 2189-2201.

52 Nonlinear parametric vibration of spinning pipes conveying fluid with varying spinning speed and flow velocity / F. Liang, A. Gao, X.-F. Li, W.-D. Zhu // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol. 95. – P. 320-338.

53 Application of the lumped-parameter method for modeling nonlinear vibrations of drill strings with stabilizers in a supersonic gas flow / L. Khajiyeva, Y. Sabirova, A. Kudaibergenov, A. Kudaibergenov // Applied Mathematical Modelling. – 2022. – Vol. 110. – P. 748-766.

54 Volpi L. P. Whirling dynamics of a drill-string with fluid–structure interaction / L. P. Volpi, E. Cayeux, R. W. Time // Geoenergy Science and Engineering. – 2024. – Vol. 232. – Art. 212423.

55 Tchomeni Kouejou, B. X. Modeling and Analysis of Drill String–Casing Collision under the Influence of Inviscid Fluid Forces / B. X. Tchomeni Kouejou,

D. F. Sozinando, A. Anyika Alugongo // Applied Sciences. – 2023. – Vol. 13. – No. 6. – Art. 3557.

56 Ma J. High temperature shape memory alloys / J. Ma, I. Karaman, R. D. Noebe // International Materials Reviews. – 2010. – Vol. 55. – No. 5. – P. 257-315.

57 Ref D. Testing of a Polymer Drill String Protector under Conditions close to Borehole / D. Ref, V. A. Yakhimovich, A. Kolotiy // Key Engineering Materials. – 2023. – Vol. 941. – P. 335-340.

58 Antman S. S. Nonlinear problems of elasticity / S. S. Antman. – New York : Springer, 2005. – 835 p.

59 Treloar L. R. G. The Physics of Rubber Elasticity / L. R. G. Treloar. – 3rd ed. – Oxford: Clarendon Press, 1975. – 370 p.

60 Shein A. Modified method of variable elasticity parameters for solving problems of dynamics of rod systems taking into account physical and geometric nonlinearities / A. Shein, A. Chumanov // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 960. – No. 4. – Art. 042066.

61 Семерикова Н. П. Распространение нелинейных изгибных волн в балке Тимошенко: дис. канд. наук. – М.: Моск. гос. авиац. ин-т., 2004. – 94 с.

62 Динамика геометрически и физически нелинейного чувствительного элемента наноэлектромеханического датчика в виде неоднородной нанобалки, находящейся в температурном и шумовом полях / В. А. Крысько, И. В. Папкова, Т. В. Яковлева [и др.] // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2020. – Т. 331. – No. 5. – С. 87-96.

63 Influence of geometric and physical nonlinearities on the internal resonances of a finite continuous rod with a microstructure / I. V. Andrianov, J. Awrejcewicz, V. V. Danishevskyy, B. Markert // Journal of Sound and Vibration. – 2017. – Vol. 386. – P. 359-371.

64 Nashif A. D. Vibration Damping / A. D. Nashif, D. I. G. Jones, J. P. Henderson. – New York : John Wiley & Sons, 1985. – 453 p.

65 Dong G. A Review of the Evaluation, Control, and Application Technologies for Drill String Vibrations and Shocks in Oil and Gas Well / G. Dong, P. Chen // Shock and Vibration. – 2016. – Vol. 2016. – P. 1-34.

66 Vibration characteristics of the drill string subjected to spinning motion and multiple stabilizers by means of Green's functions / J. M. Fan, X. P. Chang, D. Z. Han, Y. H. Li // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2022. – Vol. 135. – P. 233-257.

67 Kazemi R. Increasing Penetration Rate of Drill String by Optimum Positioning of Stabilizers / R. Kazemi, A. A. Jafari, M. Faraji Mahyari // ASME 2010 10th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis. – Istanbul, Turkey : ASMEDC, 2010. – Vol. 4. – P. 571-577.

68 Weiping Z. Effect of Prebent Deflection on Lateral Vibration of Stabilized Drill Collars / Z. Weiping, D. Qinfeng // SPE Journal. – 2011. – Vol. 16. – No. 1. – P. 200-216.

69 Cayeux E. Self-Attenuation of Drillstring Torsional Vibrations Using Distributed Dampers / E. Cayeux, A. Ambrus // SPE Journal. – 2023. – Vol. 28. – No. 5. – P. 2094-2115.

70 Evaluation of distributed damping subs with active control for stick–slip reduction in drilling / P. M. Nüsse, A. Ambrus, U. J. F. Aarsnes, O. M. Aamo // Geoenergy Science and Engineering. – 2023. – Vol. 231. – Art. 212255.

71 Modelling and detection of slipping in distributed damping subs for drillstring torsional vibration mitigation / N. C. A. Wilhelmsen, P. M. Nüsse, A. Ambrus, O. M. Aamo // Automatica. – 2025. – Vol. 179. – Art. 112429.

72 Application of Rubber Non-Rotating Drill Pipe Protectors in Drilling / Y. An, W. M. Yang, Y. Zhang, H. Q. Zhao // Advanced Materials Research. – 2006. – Vol. 11. – Art. 765.

73 Moore N. B. Reduction of Drill String Torque and Casing Wear in Extended Reach Wells Using Non-Rotating Drill Pipe Protectors / N. B. Moore, P. W. Mock, R. E. Krueger // SPE Western Regional Meeting. – Anchorage, Alaska : SPE, 1996. – Art. SPE-35666-MS.

74 Yakhimovich V. A. Approach to the Choice of Polymer Material of a Drill Pipe Protector / V. A. Yakhimovich, A. Breki, A. Kolotiy // Key Engineering Materials. – 2023. – Vol. 941. – P. 325-333.

75 Sivaselvan M. V. Nonlinear Structural Analysis Towards Collapse Simulation: A Dynamical Systems Approach / M. V. Sivaselvan, A. M. Reinhorn. – Buffalo, NY: Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research, University at Buffalo, State University of New York, 2004.

76 Vinson J. R. The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials / J. R. Vinson. – 1st ed. – New York : Routledge, 2018. – 378 p.

77 Birman V. Review of current trends in research and applications of sandwich structures / V. Birman, G. A. Kardomateas // Composites Part B: Engineering. – 2018. – Vol. 142. – P. 221-240.

78 Horgan C. Saint-Venant end effects for sandwich structures / C. Horgan // Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction. – London, UK : EMAS Publishing, 1998. – Vol. 1. – P. 191-200.

79 Love A. E. H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity / A. E. H. Love. – Cambridge : Cambridge University Press, 2013. – 662 p.

80 Prikazchikova L. Decay Conditions for Antiplane Shear of a High-Contrast Multi-Layered Semi-Infinite Elastic Strip / L. Prikazchikova // Symmetry. – 2022. – Vol. 14. – No. 8. – Art. 1697.

81 Winkler E. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit / E. Winkler. – Prag : Dominicus, 1867. – 388 p.

82 On the refined boundary condition at the edge of a thin elastic strip supported by a Winkler-type foundation under antiplane shear deformation / L. Prikazchikova, E. Nolde, W. Miszuris, J. Kaplunov // International Journal of Engineering Science. – 2024. – Vol. 205. – Art. 104152.

83 Тимошенко С. П. Сопротивление материалов / С. П. Тимошенко. – 2-е изд. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. - 365 с.

84 Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 712 с.

85 Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем / А. П. Филиппов. – 2-е изд. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.

86 Вибрации в технике: справочник: в 6 т.– М.: Машиностроение, 1978. – Т. 1. - 352 с.

87 Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи, Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.

88 Аубакирова С. Е. Моделирование нелинейной динамики деформируемых систем в задачах бурения : магист. диссертация / С. Е. Аубакирова. – Алматы: КазНУ им. аль-Фараби, 2023. – 63 с.

89 Голдстейн Г. Классическая механика / Г. Голдстейн. – 2-е изд. – М.: Наука, 1975. – 415 с.

90 Sadler J. P. A lumped parameter approach to the kineto-elastodynamic analysis of mechanisms: PhD thesis / J. P. Sadler. – Troy, NY, USA : Rensselaer Polytechnic Institute, 1971.

91 Sadler J. P. Nonlinear vibration analysis of elastic four-bar linkages / J. P. Sadler, G. N. Sandor // Journal of Engineering for Industry. – 1974. – Vol. 96. – No. 2. – P. 411-419.

92 Sadler J. P. A lumped parameter approach to vibration and stress analysis of elastic linkages / J. P. Sadler, G. N. Sandor // Journal of Engineering for Industry. – 1973. – Vol. 95. – No. 2. – P. 549-557.

93 Sadler J. P. On the analytical lumped-mass model of an elastic four-bar mechanism // Journal of Engineering for Industry. – 1975. – Vol. 97. – No. 2. – P. 561-565.

94 Хаджиева Л.А. Нелинейные колебания упругих тел и их приложение к задачам теории механизмов и машин. – Алма-Ата: КазГУ им. Кирова, 1988. – 169 с.

95 Wang Y. A lumped parameter method in the nonlinear analysis of flexible multibody systems / Y. Wang, R. L. Huston // Computers & Structures. – 1994. – Vol. 50. – No. 3. – P. 421-432.

96 Lee Y. The Lumped Parameter Method for Elastic Impact Problems / Y. Lee, J. F. Hamilton, J. W. Sullivan // Journal of Applied Mechanics. – 1983. – Vol. 50. – No. 4a. – P. 823-830.

97 Giorgio I. Non-linear lumped-parameter modeling of planar multi-link manipulators with highly flexible arms / I. Giorgio, D. V. Dionisio // Robotics. – 2018. – Vol. 7. – No. 4. – Art. 60.

98 Salinic S. On the free vibration of a multiplestepped cantilever beam / S. Salinic, A. Nikolic // 4th Serbian (29th Yu) Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Vrnjacka Banja. – Serbia, 2013. – P. 177-182.

99 Torsional stick-slip vibrations and multistability in drill-strings / Y. Liu, W. Lin, J. P. Chavez, R. De Sa // Applied Mathematical Modelling. – 2019. – Vol. 76. – P. 545-557.

100 Khajiyeva L. About discretization of the horizontal drill-string model with uncertainty on the frictional force by the lumped parameters method / L. Khajiyeva, A. Sergaliyev // Applied Mechanics and Materials. – 2014. – Vol. 665. – P. 589-592.

101 Сергалиев А. С. Анализ колебаний горизонтальной буровой штанги методом сосредоточенных параметров / А. С. Сергалиев, Л. А. Хаджиева // Известия НАН РК, серия физико-математическая. – 2014. – No. 5. – С. 64-68.

102 Khajiyeva L. Modelling of horizontal drill string motion by the lumped-parameter method / L. Khajiyeva, Yu. Sabirova, R. Sabirova // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2022. – Vol. 115. – No. 3. – P. 132-142.

103 Analysis of Drill-String Nonlinear Dynamics Using the Lumped-Parameter Method / L. Khajiyeva, I. Andrianov, Yu. Sabirova, A. K. Kudaibergenov // Symmetry. – 2022. – Vol. 14. – No. 7. – Art. 1495.

104 Atkinson K. A. An Introduction to Numerical Analysis / K. A. Atkinson. – 2nd ed. – New York : John Wiley & Sons, 1989. – 720 p.

105 Danaev N. T. Algorithm for solving non-stationary three-dimensional Navier-Stokes equations with large Reynolds numbers on multiprocessor systems / N. T. Danaev, D. B. Zhakebaev, A. U. Abdibekov // Computational Science and High Performance Computing IV. – Berlin, Heidelberg : Springer, 2011. – P. 313–326. – (Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design ; Vol. 115).

106 Ritto T. G. Drill String Horizontal Dynamics with Uncertainty on the Frictional Force / T. G. Ritto // Journal of Sound and Vibration. – 2013. – Vol. 332. – P. 145-153.

107 Крец В. Г. Основы нефтегазового дела: учебное пособие / В. Г. Крец, А. В. Шадрина. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 200 с.

108 Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

109 Amabili M. Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates / M. Amabili. – Oxford : Oxford University Press, 2008. – 392 p.

110 Ogden R. W. Non-Linear Elastic Deformations / R. W. Ogden. – New York : Dover Publications, 1997. – 532 p.

111 Kaplunov J. Antiplane shear of an asymmetric sandwich plate / J. Kaplunov, L. Prikazchikova, M. Alkinidri // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2021. – Vol. 33. – No. 4. – P. 1247-1262.

112 Choi I. Saint-Venant end effects for plane deformation of sandwich strips / I. Choi, C. O. Horgan // International Journal of Solids and Structures. – 1978. – Vol. 14. – No. 3. – P. 187-195.

113Table of integrals, series and products / I. S. Gradštejn, J. M. Ryžik, A. Jeffrey, [et al.]. – 7th ed. – Amsterdam : Elsevier Academic Press, 2009. – 1171 p.

114 Fuss N. I. Versuch einer Theorie des Widerstandes zwey- und vierrädriger Fuhrwerke, auf Fahrwegen jeder Art : mit Bestimmung der Umstände, unter welchen die einen vor den andern den Vorzug verdienen / N. I. Fuss. – Copenhagen : Brummer, 1798. – 39 p.

115 Zimmermann H. Calculation of the Upper Surface Construction of Railway Tracks / H. Zimmermann. – Berlin : Ernst and Korn Verlag, 1888. – 308 p.

116 Aghalovyan L. A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells / L. A. Aghalovyan. – Singapore : World Scientific, 2015. – 376 p.

117 Dispersion of elastic waves in a layer interacting with a Winkler foundation / B. Erbaş, J. Kaplunov, A. Nobili, G. Kiliç // The Journal of the Acoustical Society of America. – 2018. – Vol. 144. – No. 5. – P. 2918-2925.

118 Erbaş B. Asymptotic analysis of 3D dynamic equations in linear elasticity for a thin layer resting on a Winkler foundation / B. Erbaş, J. Kaplunov, G. Kiliç // IMA Journal of Applied Mathematics. – 2022. – Vol. 87. – No. 5. – P. 707-721.

119 Matysiak S. J. Edge crack in an elastic layer resting on Winkler foundation / S. J. Matysiak, V. J. Pauk // Engineering Fracture Mechanics. – 2003. – Vol. 70. – No. 17. – P. 2353-2361.

120 Argatov I. Contact Mechanics of Articular Cartilage Layers: Asymptotic Models / I. Argatov, G. Mishuris. – 1st ed. – Cham : Springer International Publishing, 2015. – Vol. 50. - 335 p.

121 A refined decay condition for a high-contrast sandwich plate subject to antiplane shear / J. Kaplunov, L. Prikazchikova, Y. Sabirova, B. Erbaş // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. – 2026. – Vol. 77. – No. 10. – Art. 281.

122 Sabirova Yu. Development of a numerical model of a drill string in a fluid flow by the lumped-parameter method / Yu. Sabirova, R. Sabirova // Proceedings of the VIII International Scientific-Practical Conference “Informatics and Applied Mathematics”. – Almaty, 2024. – P. 101-106.

123 Sabirova Yu. Decay conditions for antiplane shear of a high-contrast sandwich plate / Yu. Sabirova, L. Prikazchikova // Proceedings of the International Conference “Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education”. – Almaty, 2024. – P. 215.

124 Sabirova Yu. Mathematical modeling and computer visualization of drill string dynamics using OpenGL / Yu. Sabirova // Proceedings of the III International Student Scientific-Practical Conference “Youth Digital Forum YDF-2022 (YDF-2022)”. – Almaty, 2022. – P. 263-264.

125 Khajiyeva L. Application of the lumped parameter method for modelling nonlinear vibrations of drill strings with complicating factors / L. Khajiyeva, A. Kudaibergenov, Yu. Sabirova // Abstracts of the 16th International Conference “Dynamical Systems – Theory and Applications (DSTA 2021)”. – Lodz, Poland, 2021. – P. 751-752.

126 Sabirova Yu. Numerical modeling of dynamic systems with variable structure by the lumped-parameter method / Yu. Sabirova // Proceedings of the 58th International Scientific Conference. – Novosibirsk, Russia, 2020. – P. 99.

127 Khajiyeva L. Modeling of dynamics of a drill string with variable structure by the lumped parameters method / L. Khajiyeva, A. Kudaibergenov, Yu. Sabirova // Abstracts of the XLVIII International Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics”. – St. Petersburg, Russia, 2020. – P. 57-58.

128 Sabirova Yu. Impact of a Continuous Damping Sleeve on Nonlinear Drill String Dynamics in Fluid Flow / Yu. Sabirova, L. Khajiyeva, R. Sabirova // NODYCON 2026: Fifth International Nonlinear Dynamics Conference: Book of Abstracts. – Rome, Italy : Sapienza University of Rome, 2026. – P. 156.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. Разностные формулы и вывод граничных условий

По пространству точность аппроксимации задач для внутренних узлов $O(\Delta x^2)$, где Δx – шаг пространственной сетки, поскольку использовались центральные разностные производные.

Для дискретизации задачи параграфа 2.4.1 применялись следующие разностные формулы:

$$\left(\frac{\Delta^2 v}{\Delta x^2}\right)_j = 2\frac{\Delta x_{j+1} v_{j-1} - (\Delta x_j + \Delta x_{j+1}) v_j + \Delta x_j v_{j+1}}{\Delta x_{j+1}\Delta x_j(\Delta x_j + \Delta x_{j+1})}, \tag{A.1}$$

$$\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)_j = \frac{v_j - v_{j-1}}{\Delta x_j}, \quad \left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)_j = \frac{v_{j+1} - v_j}{\Delta x_{j+1}}, \quad \left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)_j = \frac{v_{j+1} - v_{j-1}}{\Delta x_{j+1} + \Delta x_j}, \tag{A.2}$$

где пространственный шаг $\Delta x_j, x_j$ задавался:

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}, \quad x_j = \begin{cases} (2j-1)l, & 1 \le j \le N, \\ L, & j = N+1. \end{cases} \tag{A.3}$$

Разбиение по пространству для задач параграфов 2.4.2, 2.4.3, 3.1 для удобства было равномерным $\Delta x_j = \Delta x_{j+1} = \Delta x$. Разностные формулы для производных по пространству принимают вид:

$$\begin{gathered} \left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)_j = \frac{v_{j+1} - v_{j-1}}{2\Delta x}, \\ \left(\frac{\Delta^2 v}{\Delta x^2}\right)_j = \frac{v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}}{\Delta x^2}, \\ \left(\frac{\Delta^3 v}{\Delta x^3}\right)_j = \frac{v_{j+2} - 2v_{j+1} + 2v_{j-1} - v_{j-2}}{2\Delta x^3}, \\ \left(\frac{\Delta^4 v}{\Delta x^4}\right)_j = \frac{v_{j-2} - 4v_{j-1} + 6v_j - 4v_{j+1} + v_{j+2}}{\Delta x^4}. \end{gathered} \tag{A.4}$$

Численная дискретизация схемы для второй компоненты перемещений задачи параграфа 3.1 принимает следующую форму:

$$\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right)_j = k_j\left[\frac{EI}{L^4}\left(\frac{u_{2,j-2}-4u_{2,j-1}+6u_{2,j}-4u_{2,j+1}+u_{2,j+2}}{\Delta x^4}\right)\right.$$

$$-\frac{T}{L^3}\left(\frac{u_{1,j+2}-2u_{1,j+1}+2u_{1,j-1}-u_{1,j-2}}{2\Delta x^3}\right)+\frac{1}{L^2}N(x_jL,\frac{t}{\omega_0})\left(\frac{u_{2,j-1}-2u_{2,j}+u_{2,j+1}}{\Delta x^2}\right)$$

$$+\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial N(xL,t)}{\partial x}\right)_j\frac{u_{2,j+1}-u_{2,j-1}}{2\Delta x}-\frac{3EA}{(1-\nu)L^2}\left(\frac{u_{2,j+1}-u_{2,j-1}}{2\Delta x}\right)^2\left(\frac{u_{2,j-1}-2u_{2,j}+u_{2,j+1}}{\Delta x^2}\right)$$

$$-\frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)L^2}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{u_{1,j+1}-u_{1,j-1}}{2\Delta x}\right)^2\left(\frac{u_{2,j-1}-2u_{2,j}+u_{2,j+1}}{\Delta x^2}\right)+\\ 2\left(\frac{u_{1,j+1}-u_{1,j-1}}{2\Delta x}\right)\left(\frac{u_{1,j-1}-2u_{1,j}+u_{1,j+1}}{\Delta x^2}\right)\left(\frac{u_{2,j+1}-u_{2,j-1}}{2\Delta x}\right)\end{array}\right]$$

$$-\frac{hP_0\kappa}{L}\left(\bar{M}\left(\frac{u_{2,j+1}-u_{2,j-1}}{2\Delta x}\right)-\frac{\kappa+1}{4}\bar{M}^2\left(\frac{u_{2,j+1}-u_{2,j-1}}{2\Delta x}\right)^2+\frac{\kappa+1}{12}\bar{M}^3\left(\frac{u_{2,j+1}-u_{2,j-1}}{2\Delta x}\right)^3\right)$$

$$\left.-\rho A\left(\Omega^2u_{2,j}+2\Omega\omega_0\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)_j\right)+\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{L}\left(k_m^s u_{2,j}+\omega_0 c_m^s\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)_j\right)\delta\left(x_j-x_m^s\right)\right], \qquad \text{(A.5)}$$

где $j=\overline{2,N-3}$, k_j – коэффициент, полученный в результате гауссова преобразования.

В соответствии с граничными условиями (3.3), уравнения в конечных точках $j=0,N-1$ могут быть записаны как

$$\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right)_{N-1}=0,\quad \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right)_0=0,\quad \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right)_{N-1}=0. \qquad \text{(A.6)}$$

Дискретная форма уравнений (3.1), (3.2) в краевых точках $j=1,N-2$ аналогична (3.6) и (A.5) соответственно, за исключением третьей и четвертой производных, которые дискретизируются в соответствии с граничными условиями (3.3) и могут быть записаны в следующей форме:

$$\left(\frac{\Delta^3 v}{\Delta x^3}\right)_1 = \frac{v_0 - 2v_1 + v_2}{\Delta x^3},$$
$$\left(\frac{\Delta^4 v}{\Delta x^4}\right)_1 = \frac{v_3 - 4v_2 + 5v_1 - 2v_0}{\Delta x^4},$$
$$\left(\frac{\Delta^3 v}{\Delta x^3}\right)_{N-2} = \frac{-v_{N-3} + 2v_{N-2} - v_{N-1}}{\Delta x^3},$$
$$\left(\frac{\Delta^4 v}{\Delta x^4}\right)_{N-2} = \frac{v_{N-4} - 4v_{N-3} + 5v_{N-2} - 2v_{N-1}}{\Delta x^4},$$

(A.7)

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Обоснование выбора метода Рунге-Кутты для временной аппроксимации

Для обоснования выбора метода Рунге-Кутты решим тестовую задачу, имеющую аналитическое решение, несколькими численными методами с разной вычислительной точностью (метод Эйлера первого порядка, двухшаговый метод Адама-Башфорта второго порядка, Рунге-Кутты четвертого порядка), и проанализируем сеточную сходимость каждого метода.

1. Постановка задачи

Рассмотрим поперечные колебания балки Эйлера-Бернулли:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \tag{Б.1}$$

где $w(x,t)$ – поперечные перемещения балки, EI – изгибная жесткость, ρA – погонная масса.

Положим, балка шарнирно-опертая и колебания возбуждаются начальным импульсом:

$$\begin{aligned} &w(0,t)=w(L,t)=0, \quad w_{xx}(0,t)=w_{xx}(L,t)=0,\\ &w(x,0)=0, \quad w_t(x,0)=V_0\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \end{aligned} \tag{Б.2}$$

где L – длина балки, V_0 – коэффициент начальной скорости.

Применяя метод разделения переменных, находим аналитическое решение задачи:

$$w(x,t)=\frac{V_0}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \tag{Б.3}$$

где $\omega_1=\frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ – собственная частота.

2. Методика вычислительного эксперимента

Для оценки точности численных схем интегрирования по времени изолируем временную ошибку от погрешности пространственной дискретизации, применив метод Бубнова-Галеркина. Ограничимся одним членом приближения. В качестве базисной функции используем первую собственную форму колебаний $X(x)=\sin(\pi x/L)$. Задача сводится к задаче Коши относительно временной переменной:

$$
\begin{aligned}
&T''(t) + \omega^2 T(t) = 0, \\
&T(0) = 0, \quad T'(0) \; = \; V_0.
\end{aligned}
\tag{Б.4}
$$

Понижая порядок через замену $y_1(t) = T(t), \quad y_2(t) = T'(t)$, переходим к системе ОДУ 1-го порядка через вектор состояний $\mathbf{Y}(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T$. Итоговая система имеет вид:

$$
\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -\omega^2 y_1 \end{cases}
\tag{Б.5}
$$

Явная метод Эйлера (1-й порядок точности):

$$
\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + h\mathbf{F}(t_n, \mathbf{Y}_n),
\tag{Б.6}
$$

или

$$
\begin{cases} y_{1,n+1} = y_{1,n} + h \cdot y_{2,n} \\ y_{2,n+1} = y_{2,n} - h \cdot \omega^2 y_{1,n} \end{cases}
\tag{Б.7}
$$

Метод Адама-Башфорда (двухшаговый метод, использующий решения с двух предыдущих временных слоев для повышения порядка аппроксимации):

$$
\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \frac{h}{2}\left[3\mathbf{F}(t_n, \mathbf{Y}_n) - \mathbf{F}(t_{n-1}, \mathbf{Y}_{n-1})\right],
\tag{Б.8}
$$

или

$$
\begin{cases} y_{1,n+1} = y_{1,n} + \dfrac{h}{2}\left[3y_{2,n} - y_{2,n-1}\right], \\ y_{2,n+1} = y_{2,n} - \dfrac{h}{2}\omega^2\left[3y_{1,n} - y_{1,n-1}\right]. \end{cases}
\tag{Б.9}
$$

Поскольку метод двухшаговый, для старта алгоритма использовался одношаговый метод Рунге-Кутты.

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка описан в (2.21). После решения задачи (Б.4) несколькими методами, для каждого метода находится эволюция абсолютной ошибки

$$\varepsilon(t_i) = | T_{\text{num}}(t_i) - T_{\text{exact}}(t_i) |, \tag{Б.10}$$

а также глобальная погрешность через сеточную норму L_2:

$$\|E\|_{L_2} = \left(\int_0^{t_{\text{end}}} (T_{\text{num}}(t) - T_{\text{exact}}(t))^2 \, dt \right)^{1/2}, \tag{Б.11}$$

где $T_{\text{num}}(t)$ о – численное решение, $T_{\text{exact}}(t) = \frac{V_0}{\omega}\sin(\omega t).$ – аналитическое решение.

Дискретная формула сеточной нормы:

$$\|E\|_{L_2} = \left(h \sum_{i=0}^{N} (T_{\text{num}}(t_i) - T_{\text{exact}}(t_i))^2 \right)^{1/2}. \tag{Б.12}$$

График сеточной сходимости строится для нескольких шагов интегрирования h_j, для каждого вычисляется сеточная норма – глобальная погрешность $\|E\|_{L_2}(h_j)$, далее зависимость визуализируется в log-log координатах. То есть теоретическая зависимость численного метода

$$\|E\|_{L_2} = C \cdot h^p, \tag{Б.13}$$

где C – константа, p – порядок аппроксимации, логарифримуется, приводя к линейной зависимости

$$\log\|E\| = p \cdot \log h + \log C. \tag{Б.14}$$

Тангенс угла наклона кривой будет соответствовать истинному порядку аппроксимации. Для наглядности наносим эталонные прямые $y = C \cdot x^p$.

3. Анализ результатов и обоснование метода

Система решалась численно при следующих параметрах: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $I = 10^{-6}$ м^4, $\rho = 7800$ кг/м^3, $A = 0.01$м^2, $L = 1$м, $V_0 = 0.1$м/с, $t_{\text{end}} = 10\pi / \omega$.

На рисунке Б.2 изображена эволюция абсолютной ошибки ε при $h = 10^{-4}$с. При фиксированном временном шаге погрешность метода Рунге-Кутты составляет около 10^{-10}, в то время как погрешность результатов методов Адама-Башфорта (10^{-6}) и Эйлера (10^{-4}) на 4-6 порядков меньше. Это количественно доказывает превосходство метода Рунге-Кутты в точности. Стоит отметить, что все три схемы демонстрируют рост невязки во времени, однако для метода Рунге-Кутты градиент роста пренебрежимо мал.

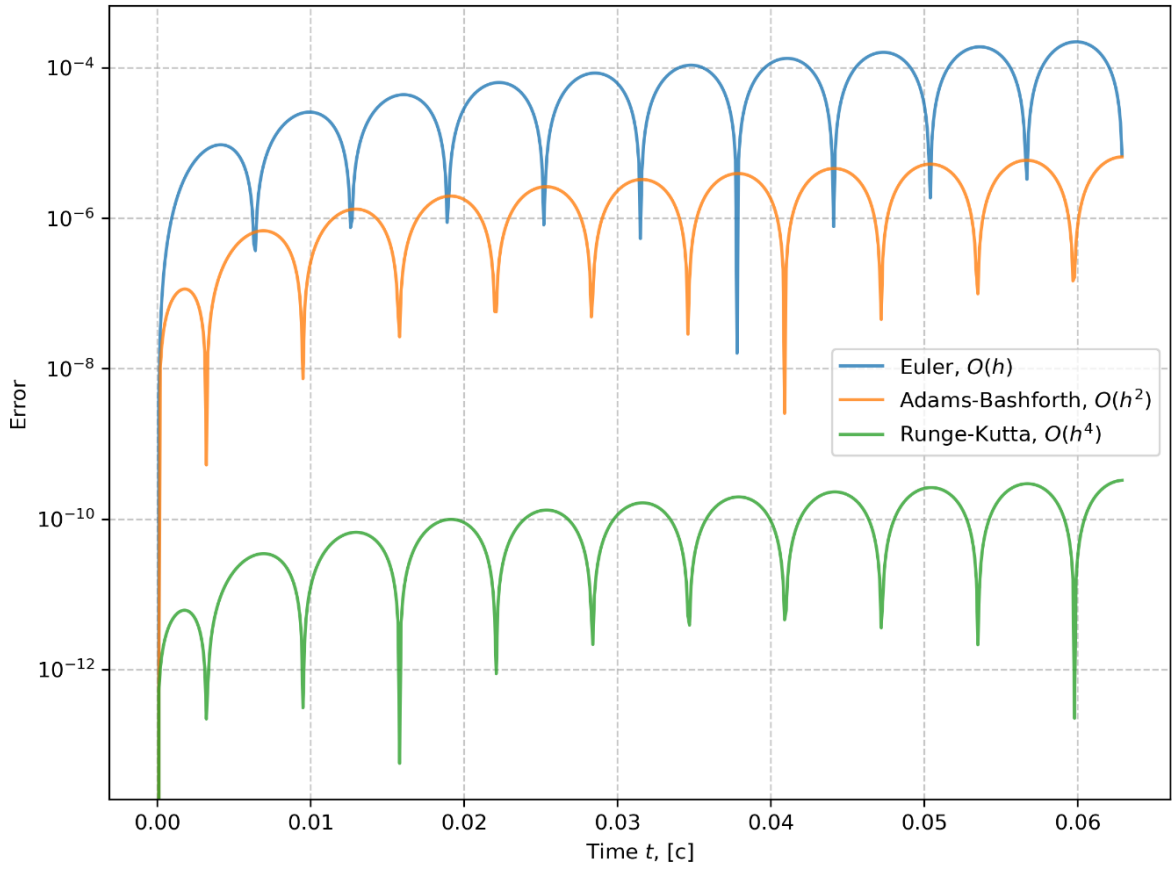


Рисунок Б.1 – Эволюция абсолютной ошибки $\varepsilon(t_i)$

На рисунке Б.2 изображен график сеточной сходимости, что наглядно доказывает и экспериментально подтверждает корректность программной реализации. Методы обеспечивают заявленную точность: порядок $O(h)$ для явного Эйлера, порядок $O(h^2)$ для Адама-Башфорта, $O(h^4)$ для Рунге-Кутты.

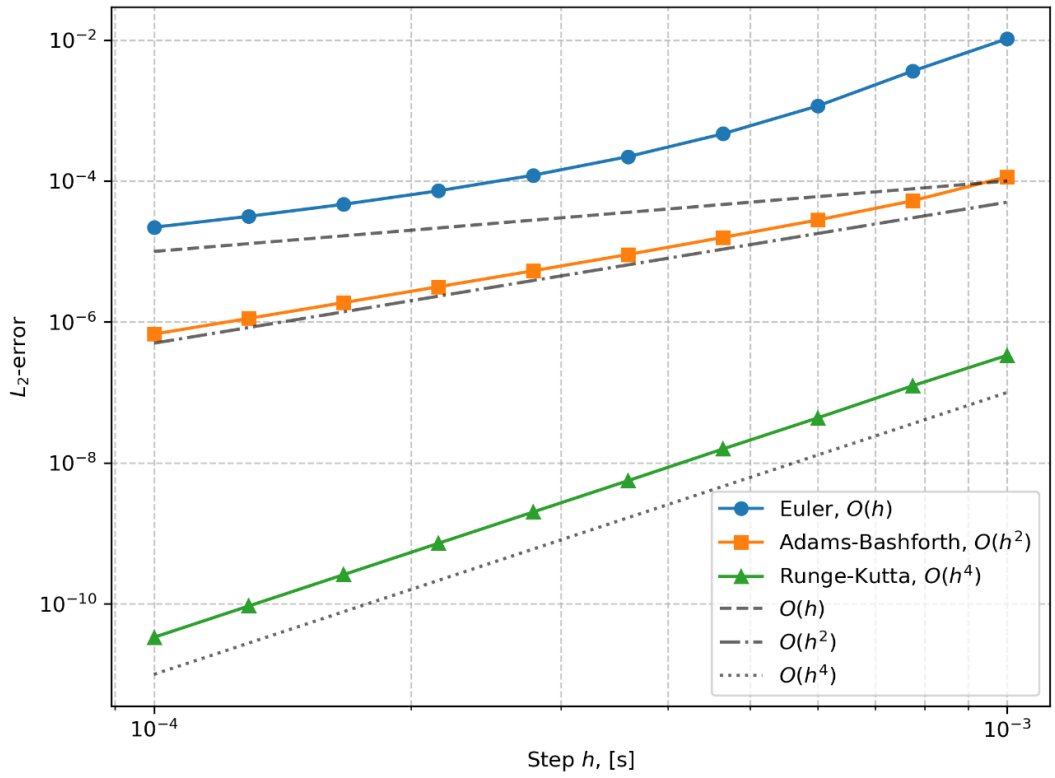


Рисунок Б.2 – График сеточной сходимости

Таким образом, можем сделать вывод о нецелесообразности использования схем 1-го и 2-го порядков для временной дискретизации уравнений поперечных колебаний ввиду быстрого накопления погрешности. Классический метод Рунге-Кутта 4-го порядка обеспечивает оптимальный баланс между вычислительной сложностью одного шага и точностью порядка $O(h^4)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В. Обоснование корректности и сходимости применяемых численных схем

В качестве примера рассмотрим вывод первого дифференциального приближения (ПДП) для пространственной модели поперечных колебаний бурильной колонны в потоке газа (3.1)-(3.2) параграфа 3.1, поскольку плоская задача параграфа 3.2 (3.12) является ее частным случаем. Доказательство отсутствия схемной вязкости для связанной системы автоматически гарантирует корректность разностной аппроксимации для обеих моделей. Анализ проводился для гладкого участка бурильной колонны между демпфирующими элементами, поскольку наличие функции Дирака и характеристической функции Хевисайда нарушают глобальную гладкость системы и не позволят разложить корректно функции в ряд Тейлора.

Используем пакет символьных вычислений Maple для проведения громоздких алгебраических преобразований. Инициализируем ряды Тейлора: зададим разложение искомой функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ в узлах сетки:

```
u_p1 := convert(taylor(u(z+h), h=0, 7), polynom):
u_m1 := convert(taylor(u(z-h), h=0, 7), polynom):
u_p2 := convert(taylor(u(z+2*h), h=0, 7), polynom):
u_m2 := convert(taylor(u(z-2*h), h=0, 7), polynom):

v_p1 := convert(taylor(v(z+h), h=0, 7), polynom):
v_m1 := convert(taylor(v(z-h), h=0, 7), polynom):
v_p2 := convert(taylor(v(z+2*h), h=0, 7), polynom):
v_m2 := convert(taylor(v(z-2*h), h=0, 7), polynom):
```

Конструируем сеточные операторы:

```
D1u := simplify((u_p1 - u_m1) / (2*h)):
D2u := simplify((u_p1 - 2*u(z) + u_m1) / h^2):
D3u := simplify((u_p2 - 2*u_p1 + 2*u_m1 - u_m2) / (2*h^3)):
D4u := simplify((u_m2 - 4*u_m1 + 6*u(z) - 4*u_p1 + u_p2) / h^4):

D1v := simplify((v_p1 - v_m1) / (2*h)):
D2v := simplify((v_p1 - 2*v(z) + v_m1) / h^2):
D3v := simplify((v_p2 - 2*v_p1 + 2*v_m1 - v_m2) / (2*h^3)):
D4v := simplify((v_m2 - 4*v_m1 + 6*v(z) - 4*v_p1 + v_p2) / h^4):
```

Подставим в исходную разностную схему (3.10), раскроем скобки командой expand(), сгруппируем слагаемые по степеням с помощью функции collect(); ограничимся вторым порядком. Ограничимся уравнением (3.1) ввиду

симметричности с уравнением (3.2). В результате группировки получаем выражение вида:

$$L_h(u_1,u_2) = L(u_1,u_2) + \Delta x \cdot R_1(u_1,u_2) + \Delta x^2 \cdot R_2(u_1,u_2) + O(\Delta x^2), \quad \text{(B.1)}$$

где $L_h(u_1,u_2)$ – разностный оператор, $L(u_1,u_2)$ – непрерывный дифференциальный оператор, $R_1(u_1,u_2)$, $R_2(u_1,u_2)$ – коэффициент при члене первого и второго порядков разложения погрешности соответственно.

Результат работы программы в Maple представлен на рисунке В.1. Коэффициент при члене первого порядка разложения равен нулю

$$R_1(u_1,u_2) = 0, \quad \text{(B.2)}$$

коэффициент при члене второго порядка разложения равен

$$\begin{aligned}
R_2(u_1,u_2) = &-\frac{h\rho_0\kappa\bar{M}}{6}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + \frac{\rho A g}{6}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + \frac{N_0 + N_t\sin(\omega t) + \rho A g x}{12}\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} \\
&+ \frac{EI_{x_2}}{6}\frac{\partial^6 u_1}{\partial x^6} + \frac{T}{4}\frac{\partial^5 u_2}{\partial x^5} + \frac{h\rho_0\kappa(\kappa+1)\bar{M}^2}{12}u_1\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} - \frac{EA(5-6\nu)}{24(1-\nu)}u_2^2\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} \\
&- \frac{h\rho_0\kappa(\kappa+1)\bar{M}^3}{24}u_1^2\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} - \frac{EA}{12(1-\nu)}u_1^2\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} - \frac{EA(5-6\nu)}{6(1-\nu)}\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\
&- \frac{EA}{3(1-\nu)}\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{EA(5-6\nu)}{12(1-\nu)}u_1\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} - \frac{EA(5-6\nu)}{6(1-\nu)}u_1\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} \\
&- \frac{EA(5-6\nu)}{6(1-\nu)}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}.
\end{aligned} \quad \text{(B.3)}$$

Выражение R_2 содержит производные более высокого порядка, а также нелинейные и смешанные члены, обусловленные изгибной, газодинамической, продольной и нелинейной составляющими исходной модели. Отсутствие вязких членов в R_2 свидетельствует об отсутствии искусственной диссипации в системе.

Локальная погрешность пространственной аппроксимации имеет второй порядок:

$$L_h(u_1,u_2) - L(u_1,u_2) = O(\Delta x^2). \quad \text{(B.4)}$$

Исходя из структуры первого дифференциального приближения

$$L(u_1,u_2) = -\Delta x^2 \cdot R_2(u_1,u_2), \quad \text{(B.5)}$$

можем сделать следующие выводы о корректности применяемого численного подхода:

1. Согласованность схемы: нулевой член разложения $L(u_1,u_2)$ полностью совпадает с исходным непрерывным дифференциальным уравнением (3.1).
2. Сохранение порядка аппроксимации: младшая степень пространственного шага сетки равна двум, что доказывает сохранение второго порядка точности при наличии геометрической нелинейности и аэродинамических нелинейных членов.
3. Отсутствие искусственной диссипации. Старшие члены ошибки содержат производные высокой степени, наличие нечетных производных в ПДП могут свидетельствовать о численной дисперсии.

Это означает, что применяемый метод сосредоточенных параметров не вносит в исследуемую нелинейную динамическую систему паразитной схемной диссипации (искусственной вязкости), обеспечивая физически достоверное моделирование амплитуд пространственных колебаний бурильной колонны без численного затухания энергии.

$$\text{"Непрерывное уравнение L(u) ="}, -C_gas3\,\mathrm{D}(u)(z)^3 - C_nonlin2\,\mathrm{D}(v)(z)^2\mathrm{D}^{(2)}(u)(z) - 2\,C_nonlin2\,\mathrm{D}(u)(z)\,\mathrm{D}(v)(z)\,\mathrm{D}^{(2)}(v)(z) - C_nonlin1\,\mathrm{D}(u)(z)^2\mathrm{D}^{(2)}(u)(z) + C_gas2\,\mathrm{D}(u)(z)^2 - C_gas1\,\mathrm{D}(u)(z) + EI_x2\,\mathrm{D}^{(4)}(u)(z) + N_ax\,\mathrm{D}^{(2)}(u)(z) + T_torq\,\mathrm{D}^{(3)}(v)(z) + dN_ax\,\mathrm{D}(u)(z)$$

$$\text{"Коэффициент при члене первого порядка R1(u) ="}, 0$$

$$\text{"Коэффициент при члене второго порядка R2(u) ="}, \frac{dN_ax\,\mathrm{D}^{(3)}(u)(z)}{6} + \frac{EI_x2\,\mathrm{D}^{(6)}(u)(z)}{6} + \frac{T_torq\,\mathrm{D}^{(5)}(v)(z)}{4} + \frac{N_ax\,\mathrm{D}^{(4)}(u)(z)}{12} - \frac{C_gas1\,\mathrm{D}^{(3)}(u)(z)}{6} + \frac{C_gas2\,\mathrm{D}(u)(z)\,\mathrm{D}^{(3)}(u)(z)}{3} - \frac{C_nonlin2\,\mathrm{D}(v)(z)^2\mathrm{D}^{(4)}(u)(z)}{12} - \frac{C_gas3\,\mathrm{D}(u)(z)^2\mathrm{D}^{(3)}(u)(z)}{2} - \frac{C_nonlin1\,\mathrm{D}(u)(z)^2\mathrm{D}^{(4)}(u)(z)}{12} - \frac{C_nonlin2\,\mathrm{D}(v)(z)\,\mathrm{D}^{(3)}(v)(z)\,\mathrm{D}^{(2)}(u)(z)}{3} - \frac{C_nonlin1\,\mathrm{D}(u)(z)\,\mathrm{D}^{(3)}(u)(z)\,\mathrm{D}^{(2)}(u)(z)}{3} - \frac{C_nonlin2\,\mathrm{D}(u)(z)\,\mathrm{D}(v)(z)\,\mathrm{D}^{(4)}(v)(z)}{6} - \frac{C_nonlin2\,\mathrm{D}(u)(z)\,\mathrm{D}^{(3)}(v)(z)\,\mathrm{D}^{(2)}(v)(z)}{3} - \frac{C_nonlin2\,\mathrm{D}^{(3)}(u)(z)\,\mathrm{D}(v)(z)\,\mathrm{D}^{(2)}(v)(z)}{3}$$

Рисунок В.1 – Результат работы программы Maple

В рамках настоящей работы данный анализ принимается достаточным для оценки порядка аппроксимации разностной схемы. Более детальное исследование дисперсионных свойств, включая линеаризацию нелинейной системы, построение численного дисперсионного соотношения и количественную оценку фазовой ошибки, выходит за рамки поставленной задачи и далее не рассматривается.

Таким образом, теоретический анализ методом ПДП в сочетании с анализом сеточной сходимости метода Рунге-Кутты в Приложении Б подтверждают надежность и вычислительную корректность применяемых разностных схем. Верификация результатов, полученных на разработанном программно-вычислительном комплексе с результатами, известными в литературе, подтверждает верную программную реализацию численного алгоритма и правомерность использования данного комплекса для решения широкого класса задач нелинейной динамики стержневых элементов.