Керімақын Айнұр
«8D05405 Вычислительные науки и статистика»
по образовательной программе
для получения степени доктора философии (PhD)
диссертационной работы на тему
«Решение задач вычислительной гидродинамики в областях со сложной геометрией методом адаптивных сеток»

Аннотация

Уравнения Навье–Стокса, описывающие движение вязкой несжимаемой жидкости, являются фундаментальной моделью современной гидродинамики и широко применяются при численном моделировании потоков в сложных инженерных системах. Для решения уравнений Навье–Стокса со сложной геометрией и быстро изменяющимися коэффициентами был применен метод криволинейных координат. Предложенный численный метод верифицирован на основе решения тестовой задачи Роуча.

В рассматриваемой задаче проведено сопоставление слабого решения, полученного методом конечных элементов FEM, с приближенным решением, найденным методом конечных разностей FDM, что подтвердило их высокую степень сходимости. Для уравнений Навье–Стокса в цилиндрической системе координат получено слабое решение краевой задачи и доказаны его устойчивость и сходимость. Для численного решения краевой задачи для слабого решения уравнений Навье–Стокса в переменных u, v, p был разработан программный код на вычислительной платформе FEniCS.

Для трубы с переменным радиусом определены осевая и радиальная скорости. Для нахождения функции тока вихрь скорости был выражен «специальным» образом. Для численного решения уравнений Навье–Стокса в переменных ψ, ω в произвольных криволинейных координатах была разработана программа на языке Python 3.11. Для численного расчета значения давления был предложен метод ступенчатого интегрирования.

Цель исследования. Численное моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости в областях со сложной геометрией методами адаптивных сеток, а также теоретическое и численное обоснование устойчивости, точности и вычислительной эффективности предложенного метода.

Объект исследования. Анализ численных решений уравнений Навье–Стокса в областях со сложной геометрией. Построение адаптивных криволинейных сеток и получение решения методом конечных элементов (FEM). Преобразование уравнений Навье–Стокса в произвольные ортогональные криволинейные координаты и разработка устойчивой численной схемы. Проведение расчетов для различных чисел Рейнольдса с целью исследования точности и вычислительной эффективности. Верификация разработанного метода на тестовых задачах и сравнительный анализ численных результатов, полученных с помощью метода конечных элементов (FEM) и метода конечных разностей (FDM).

Методы исследования. В работе применяются методы численного и компьютерного моделирования, основанные на уравнениях Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Для решения системы уравнений используются метод перехода к произвольным ортогональным криволинейным координатам, метод конечных разностей и метод конечных элементов. Кроме того, для дискретизации расчетной области рассматриваются структурированные и неструктурированные сетки, а граничные и начальные условия задаются надлежащим образом. Анализируются устойчивость и сходимость вычислений, а также проводится сравнительный анализ для оценки точности полученных результатов. Численное моделирование реализуется с применением современных вычислительных алгоритмов, при этом результаты представляются в виде графических зависимостей и табличных данных.

Научная новизна. Основные результаты, выносимые на защиту.

1. Для решения уравнений Навье–Стокса в областях со сложной геометрией и быстроменяющимися коэффициентами был разработан метод криволинейных координат.
2. Верификация предложенного численного метода решения путем проведения расчетов по тестовой задаче Роуча.
3. Слабое решение рассматриваемой задачи, найденное с помощью метода конечных элементов (FEM), было сопоставлено с приближенным решением, полученным методом конечных разностей (FDM), при этом была продемонстрирована их высокая степень сходимости.
4. Было определено слабое решение краевой задачи для уравнений Навье–Стокса в цилиндрических координатах, доказаны его устойчивость и сходимость.
5. 5. Разработан программный код на вычислительной платформе FEniCS для численного решения краевой задачи для слабого решения уравнений Навье–Стокса в переменных u, v, p Для трубы с переменным радиусом определены компоненты осевой и радиальной скорости. Для вычисления функции тока вихрь скорости был представлен в «специальном» виде.
6. Для численного решения уравнений Навье–Стокса в переменных ψ, ω в произвольных криволинейных координатах была разработана программа на языке Python 3.11 и получено авторское свидетельство. Для численного расчета значения давления предложен метод ступенчатого интегрирования.

Апробация. По диссертационной работе были сделаны доклады на 7 научных семинарах и проведены их обсуждения.

1. Темирбеков Н.М., Керімақын А. Решение дифференциальных уравнений в двумерном пространстве с использованием метода построения адаптивной сетки. // Труды VII Всемирного конгресса математиков тюркского мира (TWMS-2023). – Туркестан, Казахстан, 20–23 сентября 2023 г. – Математическое общество тюркского мира, 2023 г.
2. Нурлан Темирбеков и Керимакын Айнур представили доклад на тему «Исследование динамики каталитических нейтрализаторов автомобилей с использованием уравнений Навье-Стокса в произвольных криволинейных

координатах» на конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании» (CITech-2024), Алматы, 23–24 октября 2024 г.

3. Темирбеков Н.М., Керимакып А., Математическое и компьютерное моделирование каталитического нейтрализатора на основе уравнений Навье-Стокса в криволинейных координатах. Математическое моделирование, уравнения математической физики и геометрия, к 60-летию Института математики и математического моделирования, апрель_конференция_2025.

4. Керимакын Айнур, Математическое и вычислительное моделирование каталитического нейтрализатора с использованием уравнений Навье–Стокса в криволинейных координатах, ISAAC CONGRESS ASTANA 2025, на 15-м конгрессе ISAAC, состоявшемся в Назарбаев Университете, Казахстан, с 21 по 25 июля 2025 года.

5. Темирбеков Н.М., Керимакын Айнур, Математическое и вычислительное моделирование каталитического нейтрализатора с использованием уравнений Навье–Стокса в криволинейных координатах, СБОРНИК ТЕЗИСОВ X Международной научной конференции «МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ», Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Республика Казахстан, Алматы, 24–26 сентября 2025 года.

6. Керимакын А., Айтуганова Ж., Ибрагимова Д., Математическое моделирование построения адаптивной сетки на основе метода эквивалентного распределения в сложной геометрической области, – Алматы: «Информатика и прикладная математика».

7. Н. М. Темирбеков, А. Керимакин, Application of curvilinear coordinate methods for flow modeling in complex geometries, Казахстан в эпоху искусственного интеллекта: проблемы и перспективы развития агропромышленного комплекса и инжиниринга, Алматы, 16-17 апреля 2026 г.

Публикации. По результатам диссертационного исследования опубликовано 4 работы, в том числе:

— 2 статьи в международной базе данных Scopus

1. Нурлан Темирбеков, Айнур Керимакынова, Математическое и вычислительное моделирование каталитического нейтрализатора с использованием уравнений Навье–Стокса в криволинейных координатах, – Mathematics 2025, 13(8), 1355; https://doi.org/10.3390/math13081355

2. Темирбеков Н., Хакимзянов Г., Керимакынова А. Применение метода криволинейных координат для численного решения уравнений Навье–Стокса в областях со сложными границами // Computation. – 2026. – Т. 14. – № 3. – Статья 58. – DOI: 10.3390/computation14030058

3. Темирбеков Нурлан М., Керимакынова Айнур. Методы создания ортогональных криволинейных сеток в средах со сложной геометрией. Вестник Национальной инженерной академии Республики Казахстан, 2025, 3(97), 242–250.

4. Керимакынова А., Шекербаева Ш., Керимакынов С., Талпакова Б. Построение адаптивной сетки в области со сложной геометрией на основе метода эквивалентного распределения. Вестник Казахского национального

педагогического университета имени Абая. Серия «Физико-математические науки», 2025, 2(90), 72–80. https://doi.org/10.51889/2959-5894.2025.90.2.006.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из нормативных ссылок, введения, трех основных глав (содержащих подразделы), заключения и списка использованной литературы.

Введение содержит обоснование актуальности темы, цели и задачи исследования, математическое моделирование рассматриваемых вопросов, положения, выносимые на защиту, объект исследования, научную новизну, теоретическую и практическую значимость полученных результатов, а также информацию об апробации работы, публикациях автора и структуре диссертации.

В первой главе диссертации рассмотрена слабая постановка начально-краевой задачи в цилиндрических координатах для уравнений Навье–Стокса–Бринкмана, описывающих течение вязкой несжимаемой жидкости в пористой среде. Задача сформулирована в вариационном виде для случая осевой симметрии, а слабое решение определено в пространствах Соболева; на основе энергетического метода получены априорные оценки, обеспечивающие устойчивость решения. Численные расчеты были выполнены на платформе FEniCS. По мере увеличения числа Рейнольдса максимальное значение функции тока ψ_{max} возрастает, что обусловлено усилением инерционных эффектов и расширением зоны циркуляции.

Кроме того, был проведен анализ для различных параметров дискретизации сетки. Результаты показывают, что расхождение между решениями, полученными при плотностях сетки 350 и 450, незначительно, что подтверждает достижение сеточной независимости численного решения и устойчивость модели, разработанной с использованием метода конечных элементов.

Во второй главе диссертации осуществлено преобразование уравнений Навье-Стокса из цилиндрической системы координат в произвольную криволинейную систему координат и разработана конечно-разностная схема для полученных уравнений. Используется метод ортогональных криволинейных сеток, на базе которых получено численное решение уравнений. Для решения системы уравнений была использована трехслойная конечно-разностная схема и предложен итерационный метод.
Разработанный алгоритм обеспечивает ортогональность сетки и численную устойчивость решения. Расчеты в диапазоне Re = 10–1000 показали хорошее соответствие полученных результатов эталонным данным Роуча, а также исследованиям Наполитано М. и Орланди П.

В третьей главе диссертации система уравнений Навье–Стокса, примененная для моделирования каталитического нейтрализатора, базируется на фундаментальных физических закономерностях. Переход от цилиндрических координат к произвольным криволинейным ортогональным координатам был обоснован строгими математическими преобразованиями. Для построения ортогональной сетки в криволинейной области были использованы известные методы.

Для решения уравнений был применен метод конечных разностей, а

вычислительный процесс был реализован на основе трехслойного алгоритма. Устойчивость и сходимость данной схемы доказаны с теоретической точки зрения. Численное решение получено в среде Jupyter с использованием языка программирования Python 3.11.

Степень вложения. Результаты, полученные в диссертационной работе, заключаются в совершенствовании численных методов приближенного решения уравнений Навье–Стокса, повышении их устойчивости и сходимости, а также в обеспечении высокой точности вычислений для областей со сложной геометрией. Кроме того, предложенные подходы позволяют эффективно использовать вычислительные сетки и повысить надежность численных алгоритмов.

Практическая значимость исследования определяется возможностью применения разработанного метода при моделировании потоков жидкости в автомобильных каталитических нейтрализаторах и иных инженерных системах со сложной геометрией.

Область применения. Модель, полученную в диссертационной работе, можно усовершенствовать путем учета термодинамических эффектов и влияния химических реакций, что является критически важным для оценки общей эффективности работы каталитического нейтрализатора. Представленная в диссертации модель может быть использована для оптимизации геометрии нейтрализатора, а также для моделирования протекающих внутри него физико-химических процессов. Данная модель применима не только в автомобильной промышленности, но и в таких областях, как очистка промышленных газов, моделирование газовых реакторов в химическом производстве и проектирование систем защиты окружающей среды.

Вклад соискателя в публикацию. По результатам диссертационного исследования опубликованы 2 статьи в журналах, индексируемых в базе данных Scopus, а также 2 статьи в отечественных изданиях. Соискатель продемонстрировал глубокое понимание и критический анализ методологических подходов и теоретических положений, представленных в данных публикациях. Кроме того, результаты, полученные в каждом разделе работы, являются непосредственной заслугой соискателя. Тем не менее, при разработке отдельных теоретических положений соискатель опирался на консультации отечественного и зарубежного научных руководителей.