***15-дәріс*. Ляпунов бойынша орнықтылық және асимптоталық орнықтылық**

Дәрістің қысқаша мазмұны:

Орнықтылық – дифференциалдық теңдеулер шешімінің бір қасиеті шешімнің орнықтылығы ұғымымен танысу үшін әртүрлі мысалдарды талдап, олардың шешімдерінің структурасын қарастырайық.

1) $y' = \lambda y$ (1) y=0

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y$$

$$\frac{dy}{y} = \lambda dx$$

$$\ln y = \lambda x + \ln c$$

$$y = ce^{\lambda x}$$

$$y(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 = ce^{\lambda x_0} \Rightarrow c = \frac{y_0}{e^{\lambda x_0}}$$

$$y = \frac{y_0}{e^{\lambda x_0}} e^{\lambda x} \Rightarrow y = y_0 e^{\lambda(x-x_0)}$$ (3) – қозуы бар шешім

$$y(x_0) = 0$$

$$y_0 = 0$$

(2) $y \equiv 0$ деген шешімді (1) теңдеудің қозбаған (қозуы жоқ) шешімі деп аталады.

Ендігі мақсатымыз $x \geq x_0$ үшін қозуы жоқ шешімдерге қарағанда қозуы бар шешімдердің өзгеруін қарастыру. Немесе қозуы жоқ шешімдердің жақын аймақтарында қозуы бар шешімдердің шексіз аз өзгеруін қарастыру. Ол үшін 1-мысалдағы λ параметрінің 3 жағдайын қарастырамыз.

1-жағдай. $\lambda = 0$ болса, $y' = 0 \Rightarrow y \equiv 0; \quad y(x_0) = 0$ (4)

$y(x_0) = y_0, \quad y \equiv y_0$ (5)

Кез келген $x \geq x_0$ үшін $y \equiv 0$ (4) қозуы жоқ шешімі Ляпунов мағынасында орнықты деп аталады, егер $\forall \varepsilon > 0$ үшін $\exists \delta = \delta(\varepsilon); |y_0| < \delta$ болғанда $|y| < \varepsilon$ болатындай $\exists \delta = \varepsilon$ деп алсақ, онда (4) қозуы жоқ шешімі Ляпунов мағынасында орнықты.

2-жағдай. $\lambda < 0$

$y \equiv 0; \quad y(x_0) = 0$ (6)

1. орнықты $\forall \varepsilon > 0$ үшін $\exists \delta = \delta(\varepsilon); |y_0| < \delta$, $|y| < \varepsilon \Rightarrow \exists \delta = \varepsilon$

$$|y| = \left|y_0 e^{\lambda(x-x_0)}\right| \leq \left|e^{\lambda(x-x_0)} \leq 1\right| < \varepsilon$$

2. $x \to +\infty$ қозуы бар шешімдер қозуы жоқ шешімдерге ұмтылады.

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} y_0 e^{\lambda(x-x_0)} = 0$$

Бұл жағдайда жоғарыда көрсетілген 2 шартты қанағаттандыратын қозуы жоқ $y = 0$ шешімі ассимптоталық орнықты деп аталады.

3-жағдай. $\lambda > 0$

$y(x_0) = y_0, \quad y = y_0 e^{\lambda(x-x_0)}, \quad y \equiv 0, y(x_0) = 0$

Бірақ y_0 шамасын қандай шексіз аз қылып таңдасақ та бұдан у-тің шексіз аз болатынын ала алмаймыз немесе $|y| = \left|y_0 e^{\lambda(x-x_0)}\right| < \varepsilon$. Ендеше $\exists \delta(\varepsilon) = \delta$

Сонымен қарастырылған мысалда бір λ параметрінің 3 түрлі жағдайында $y = 0$ қозуы жоқ нольдік шешімі орнықты, ассимптоталық орнықты немесе орнықсыз болады екен. Бұның өзі $x \geq x_0$ үшін қозуы жоқ шешімдер $\lambda \leq 0$ жағдайында қозуы бар шешімдерден шексіз аз өзгерісте болады деген сөз. Ал $\lambda > 0$ жағдайында қозуы бар шешім мен қозуы жоқ шешімнің өзгерісі шексіз үлкен.